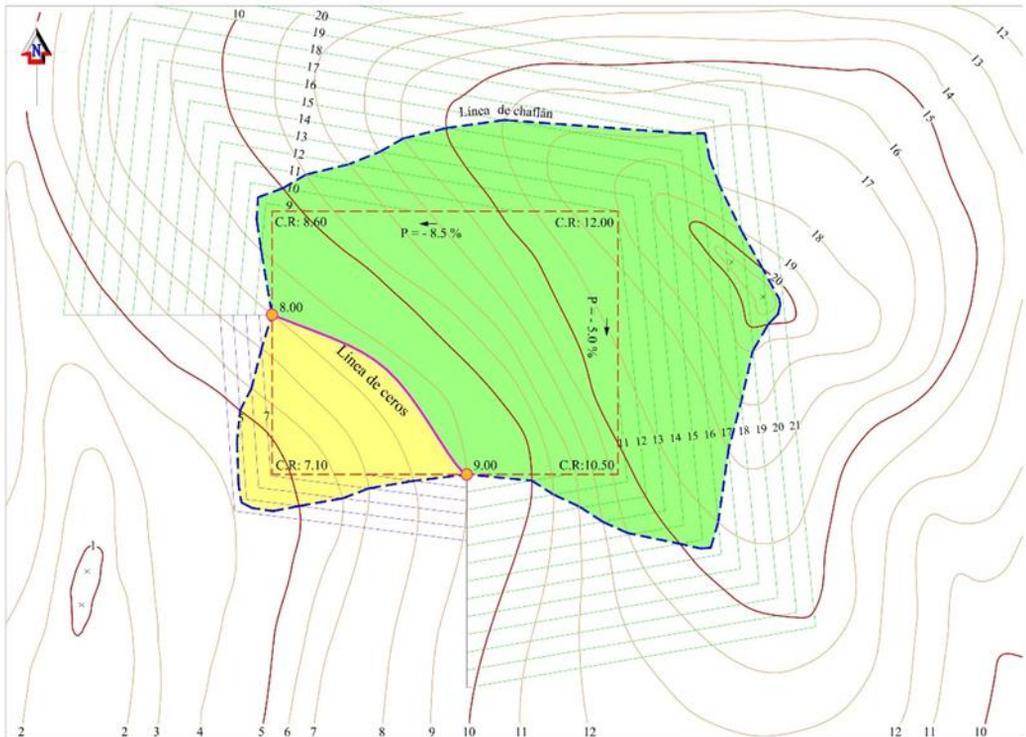


INTRODUCCIÓN A LA ALTIMETRÍA



Gonzalo Jiménez Cleves - Julián Garzón Barrero - Darío Fernando Londoño Pinilla

Profesores Programa de Tecnología Topografía - Facultad de Ingeniería - Universidad del Quindío

INTRODUCCIÓN A LA ALTIMETRÍA

**Gonzalo Jiménez Cleves
Julián Garzón Barrero
Darío Fernando Londoño Pinilla**

**Profesores Programa de Tecnología Topografía
Facultad de Ingeniería
Universidad del Quindío**

Gonzalo Jimenez Cleves, MsC

Julián Garzón Barrero, MsC

Darío Fernando Londoño Pinilla, MsC (c)

INTRODUCCIÓN A LA ALTIMETRÍA

Esta obra es propiedad de los autores. Prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio sin permiso escrito de los propietarios del copyright ©.

ISBN: 978-958-8801-55-1

Los nombres y productos citados en este libro corresponden a productos de software libre y productos de marcas registradas. Han sido utilizadas en este libro con fines editoriales y como ilustración y referencia de las herramientas disponibles para los profesores.

Reproducido y editado por: ELIZCOM SAS

www.elizcom.com

ventas@elizcom.com

Celular (57+) 311 334 9748

Fax: (56) (6) +7493244

Armenia, Quindío, Colombia-2017

Tiraje 200 ejemplares.

DEDICATORIA

A mis estudiantes de quienes he aprendido más de lo que quiero admitir

Gonzalo Jiménez Cleves
Julián Garzón Barrero
Darío Fernando Londoño Pinilla

Diciembre 2017

INTRODUCCIÓN

El libro que presentamos bajo el título *introducción a la altimetría* es fruto de varios años de estudio y amplias consultas de los autores, de profesores del espacio académico, de proyectos realizados y de las diferentes experiencias personales.

Consideramos que esta obra es un importante elemento de partida para estudiar los fundamentos de la altimetría, que proporciona a los estudiantes de este curso herramientas útiles para que puedan resolver problemas en el campo de la topografía.

La metodología aplicada es la de solución de problemas enfocados hacia las labores de campo y oficina, le hemos dado gran importancia a la práctica y a la evaluación, a fin de que el estudiante adquiera gradualmente conocimientos, habilidades y destrezas que es lo fundamental en este tipo de espacios académicos.

El libro contiene diez capítulos en los cuales se discuten los temas fundamentales de altimetría. En los primeros cuatro se hace una descripción de los fundamentos teóricos y prácticos de la toma de datos en los procesos altimétricos.

En el capítulo cinco se hace un análisis de errores que se adaptan como elemento fundamental para el diseño de especificaciones que se discuten dentro aquellos supuestos que dan validez al análisis estadístico y su función con los estudios topográficos.

El capítulo seis se dedica a los ajustes de redes de nivelación, tema olvidado e ignorado por muchos pero fundamental en los procesos de integración de información.

En los capítulos ocho, nueve y diez, vamos desde la representación de un terreno, pasando por las técnicas modernas de interpolación y terminado con el tema fundamental de la altimetría como el cálculo de volúmenes de tierra.

Deseamos expresar nuestros agradecimientos sinceros a los profesores y estudiantes del programa de topografía de la facultad de ingeniería, de la Universidad del Quindío. Por su aporte para la construcción de este libro.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	i
ÍNDICE	iii
1. GENERALIDADES	1
1.1 Glosario.....	3
2. NIVELACIÓN DIFERENCIAL.....	5
2.1 Principio de nivelación.....	5
2.2 Niveles automáticos y basculantes.....	6
2.2.1 Niveles automáticos	6
2.2.2 Niveles basculantes	6
2.3 Cálculo de desniveles.....	7
2.3.1 Método del punto extremo	7
2.3.2 Método del punto medio	9
2.3.3 Detrás de los puntos	9
3. NIVELACIÓN GEOMÉTRICA	11
3.1 Nivelación diferencial	11
3.2 Nivelación para obtener un perfil.....	12
3.3 Nivelación recíproca	14
3.4 Nivelación con tres hilos.....	15
3.5 Nivelación de puntos en el techo	17
3.6 Métodos de comprobación	20
3.6.1 Nivelación y contra - nivelación.....	20
3.6.2 Doble punto de cambio	21
3.6.3 Doble altura instrumental	22
3.6.4 Especificaciones de nivelación diferencial de tercer orden	23
4. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA Y ESTADIMÉTRICA.....	27
4.1 Nivelación trigonométrica	27
4.2 Nivelación estadimétrica	33

4.3 Especificaciones segundo orden (vertical) con estación total.....	36
5. DISEÑO DE ESPECIFICACIONES.....	39
5.1 Errores sistemáticos en nivelación	39
5.1.1 Curvatura y refracción	39
5.1.2 Colimación	40
5.1.3 Inclinación de la mira vertical	41
5.1.4 Asentamiento del trípode.....	41
5.1.5 Error de índice de la mira.....	42
5.2 Diseño	44
5.2.1 Límite de utilización de la mira	44
5.2.2 Error centrado de la burbuja	44
5.2.3 Error de lectura debido a la resolución del telescopio	45
5.2.4 Error de observación de la mira.....	45
5.2.5 Error en la mínima división de la mira	45
5.2.6 Errores del medio externo	46
5.2.7 Principales fuentes de error en la nivelación geométrica	46
5.2.8 Diseño nivelación geométrica.....	47
5.2.9 Diseño con placa plano paralela	50
5.3 Estándares mínimos de cierre para de control vertical.....	51
6. CÁLCULO Y AJUSTE DE REDES DE NIVELACIÓN.....	53
6.4 Cálculo y ajuste de una nivelación lineal	54
6.4.1 Nivelación sin control	54
6.4.2 Nivelación con control en uno de los extremos	54
6.4.3 Nivelación con control en dos extremos	54
6.5 Cálculo y ajuste de circuitos.....	58
6.6 Cálculo y ajuste de redes	60
6.6.1 Método de aproximaciones sucesivas.....	60
7. NIVELACIÓN DE SUPERFICIES.....	65
7.1 Por distancias fijas lo largo de un eje.....	65
7.2 Cota por cambios de pendiente.....	65
7.3 Nivelación por puntos de quiebre	66
8. REPRESENTACIÓN DEL RELIEVE	69

8.1 Mapas en relieve	70
8.2 Curvas de nivel.....	70
8.2.1 Características de las curvas de nivel	71
8.2.2 Clases	72
8.2.3 Equidistancia.....	73
8.2.4 Ventajas de las curvas de nivel o isolíneas	73
8.2.5 Rotulado de las curvas de nivel	73
8.2.6 Relación entre la escala y la equidistancia	74
8.2.7 Modelos digitales de elevación DEM.....	74
9. INTERPOLACIÓN	75
9.1 Interpolación lineal.....	76
9.2 Triangulación de Delaunay	78
9.3 Los polígonos de Thiessen o Voronoi	79
9.4 Red de Triángulos Irregulares (TIN)	80
9.5 Elementos en la superficie de un TIN	83
10. APLICACIONES DE LOS PLANOS TOPOGRÁFICOS	89
10.1 Interpretación del relieve	89
10.1.1 Perfiles longitudinales y transversales	90
10.1.2 Cómo elaborar un perfil.....	91
10.1.3 Visibilidad.....	92
10.1.5 Línea de pendiente	93
10.1.6 Punto de ceros.....	94
10.1.7 Terraceo.....	97
10.1.8 Determinación gráfica de puntos de chaflán	97
10.2 Movimientos de tierra	103
10.2.1 Características generales de los movimientos de tierra.....	104
10.2.2 Volúmenes	104
10.2.3 Cálculo de volúmenes por el método de curvas de nivel	111
10.2.4 Exactitud del cálculo de Volúmenes	111
BIBLIOGRAFÍA	115

1. GENERALIDADES

La altura de un punto sobre la superficie terrestre es la distancia que existe sobre la proyección del plano vertical que pasa por este y una superficie de referencia conocida como datum vertical. Su medición se logra mediante el procedimiento topográfico de nivelación geométrica, a través del cual se determinan elevaciones o diferencias entre ellas. Debido a la influencia de la gravedad en los procesos de medición es necesario realizar correcciones gravimétricas.

De acuerdo con (Sánchez, 2002) en la nivelación geométrica el sistema de medición (nivel de precisión y miras verticales graduadas) se orienta verticalmente según la línea de la plomada del campo de gravedad terrestre; por tanto, el plano horizontal del instrumento de medición coincide con la línea tangente a la superficie equipotencial que es normal al geode y pasa por el punto de observación. De acuerdo con esto, las diferencias de nivel medidas corresponden con la sección de la línea de la plomada, que coincide con el eje vertical de las miras, entre la superficie terrestre y la tangente a la equipotencial realizada por el instrumento.

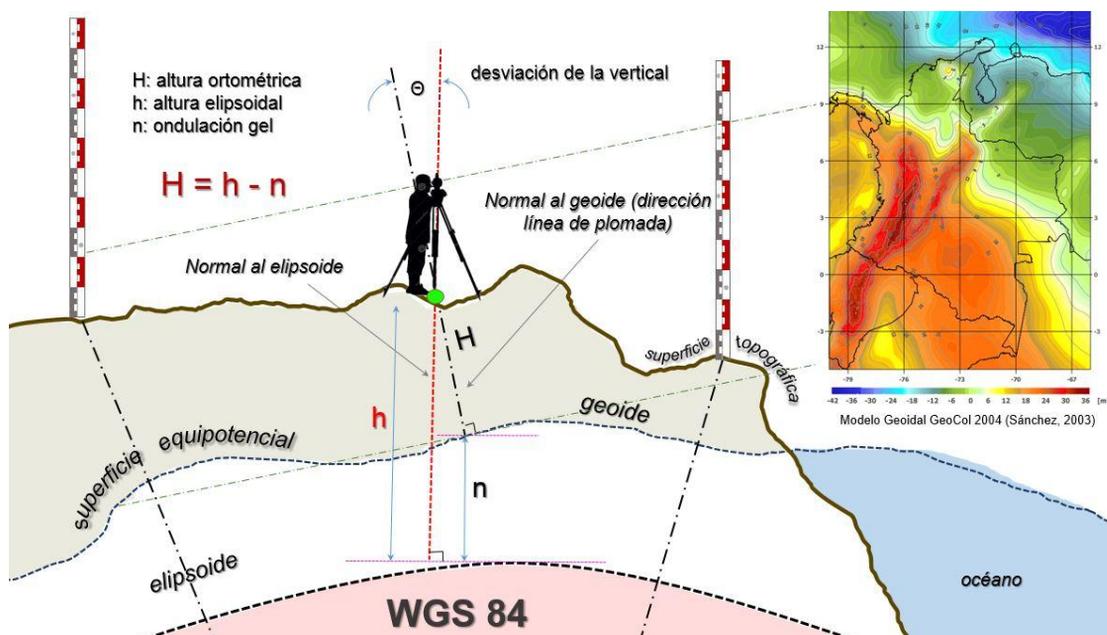


Figura 1. Relación de superficies de referencia vertical¹

Cualquier objeto en el campo gravitacional de la tierra tiene energía potencial derivada que lo atrae hacia el centro de masas terrestre, esa energía está directamente relacionada con la altura. Hay un número infinito de puntos donde el potencial de la gravedad es siempre el mismo, se le conoce como superficie equipotencial.

¹ Fuente: los autores

El nivel medio del mar no es en sí mismo una superficie equipotencial, otras fuerzas diferentes a la de la gravedad lo afectan como salinidad, temperatura, corrientes y vientos; el geoide es definido únicamente por gravedad. El geoide se define como la figura donde el potencial de la gravedad es constante en cada uno de sus puntos, es una superficie más lisa que la superficie terrestre, pero también contiene irregularidades; de forma aproximada se interpreta como la continuidad del nivel medio del mar sobre la superficie terrestre. La forma del geoide es abultada porque la gravedad no es constante en toda la superficie, en cualquier lugar de la tierra un vector puede describir la fuerza de la gravedad, pero no todos los vectores tienen la misma dirección o magnitud, donde la tierra es más densa la gravedad es mayor. El geoide ondula con la distribución desigual de la masa de la tierra. La separación entre la superficie del geoide y el elipsoide alrededor del mundo varía entre +85 m al oeste de Irlanda hasta -106 m al sur de la India.

Los sistemas de navegación satelital (GNSS por sus siglas en inglés) se basan en el sistema de geodésico mundial WGS1984. Este se define por un elipsoide de revolución y está centrado en coincidencia con el centro de masas de la tierra, es decir, geocéntrico, el ajuste entre elipsoide y geoide se plantea a nivel global, se intenta que el elipsoide de revolución compense en volúmenes las ondulaciones del geoide.

Los GNSS proporcionan su altura con respecto al elipsoide h (altura elipsoidal), en la Figura 1, para conocer la altura ortométrica H , —*que resulta más familiar pues se refiere al nivel medio del mar y no a un elipsoide imaginario*— es necesario conocer la ondulación geoidal n ya que:

$$H = h - n \quad (1)$$

El datum es un punto de origen con coordenadas geográficas, tangente al elipsoide y al geoide, brinda el marco de referencia para determinar posiciones sobre la superficie terrestre, es decir, conecta las mediciones de campo con el sistema de referencia; además, define el origen y orientación de las líneas de latitud y longitud, por tanto,

$$\text{datum} = \text{elipsoide de referencia} + \text{red de control} \quad (2)$$

El elipsoide de referencia, hace una aproximación simple de la forma de la tierra, usado como base para dibujar la retícula en la proyección de un mapa. La red de control es local, y se compone de una serie de puntos de control o marcas terrestres cuyas coordenadas: latitud, longitud y altura se determinan con alta precisión. Esto permite finalmente ajustarse a la superficie que se busca representar.

De acuerdo con (Sánchez, 2005) el sistema vertical oficial de Colombia es el datum Buenaventura fijado sobre el Océano Pacífico a través de observaciones hechas a su nivel medio por periodo de 18 años. Este es el punto de partida de las redes de nivelación nacionales que se han materializado mediante hitos a largo de las vías del territorio nacional de primero, segundo y tercer orden ($\pm 4 \text{ mm } \sqrt{k}$, $\pm 8 \text{ mm } \sqrt{k}$, $\pm 12 \text{ mm } \sqrt{k}$). En la época de implementación de estas redes el sistema oficial de control no requería registros de valores gravitacionales. Esta situación y los fuertes cambios del relieve de la zona Andina Colombiana causan errores que van desde los 0,01 m en zonas planas hasta 0,82 m en áreas de alta montaña, adicional a esto hay afectación por la condición geodinámica del país, pues el mareógrafo de Buenaventura se encuentra sobre una zona de deformación cortical (Drewes, y otros, 1995) (Kellogg & Vega, 1995). También existe afectación de las alturas niveladas por la ausencia de correcciones ortométricas. La definición del punto de Buenaventura asume que el geode coincide con el nivel medio del mar ignorándose que este no es una superficie equipotencial y que presenta desviaciones superficiales ocasionadas por los cambios seculares. Todas estas condiciones adversas exigen que se estudie el campo gravitacional terrestre en la zona de nivelación y que se observen de forma continua los desplazamientos verticales de la corteza terrestre, es por esto que IGAC en 2003 ha producido el modelo geoidal para Colombia. (IGAC, 2005) Emitió la resolución 068 donde se adopta para el territorio nacional como datum oficial el *Marco Geocéntrico Nacional de Referencia MAGNA-SIRGAS* compatible con tecnologías de posicionamiento GNSS.

1.1 Glosario

A continuación, se definen algunos términos que se usan en el desarrollo del libro.

Altitud o elevación: Altura de un determinado lugar o de un punto de la superficie terrestre con referencia al nivel del mar (IGAC, 2005).

Altura: Distancia vertical entre una superficie de referencia y un punto determinado (IGAC, 2005).

Altura instrumental: (AI) Elevación del plano de vista con respecto a un plano de referencia asumida.

Altura ortométrica: Distancia vertical entre la superficie física de la tierra y la superficie del geode. Esta distancia se mide a lo largo de la línea de la plomada, la cual es la curva tangencial a la dirección de la gravedad en cualquier punto. Son también consideradas alturas sobre el nivel medio del mar (IGAC, 2005).

BM: Base Marcada (del Inglés Bench Mark) es un punto permanente de elevación conocida. Está ubicado por asignación arbitraria de una elevación fija o por extensión

de control vertical. El BM debe ser permanente, estable y recuperable (Brinker & Minnick, 1987).

Exactitud: Cercanía de los valores de las observaciones realizadas con respecto a los valores reales o a los valores aceptados como verdaderos. NTC 5043.

Pendiente: relación de la diferencia de nivel entre dos puntos y su distancia horizontal, define la inclinación de una línea respecto de su proyección horizontal, dicha inclinación se puede medir en grados o en porcentaje.

Precisión: Medida de repetitividad de un conjunto de medidas (ISO TC/211). La precisión está dada por el valor de la desviación estándar calculada para las diferentes medidas a un valor central y depende de la sensibilidad del equipo empleado y la habilidad del observador (IPGH, 2013).

Punto: Primitivo geométrico sin dimensiones. NTC 4611.

Punto de cambio: Es un punto sobre el cual se toma una vista más $V(+)$ con el objeto de determinar la altura instrumental. Su característica distintiva es que sobre él se dirigen dos visuales; una vista menos $V(-)$ desde una posición del nivel y una vista más $V(+)$ de la siguiente posición.

Vista adelante: $V(-)$ También llamada vista de frente o vista menos, es una visual tomada sobre una mira colocada en un punto de elevación desconocida para determinar qué tanto por debajo del plano de visual que se encuentra ese punto, esto determina la elevación del punto con respecto al plano de referencia.

Vista atrás: $V(+)$ También llamada vista a espaldas o vista más; es una visual lanzada sobre una mira situada sobre un punto de elevación conocida para determinar qué tan alto está el plano de vista sobre ese punto y establecer la altura del instrumento con respecto al plano de referencia asumida.

Vista intermedia: Es una visual tomada sobre la mira colocada en un punto para determinar su elevación, La característica distintiva de un punto intermedio es que sobre él se dirige únicamente una visual, una vista menos.

2. NIVELACIÓN DIFERENCIAL

La nivelación diferencial también, llamada nivelación geométrica mide el desnivel entre dos puntos a partir de la visual horizontal lanzada desde el nivel hacia las miras verticales colocadas en los dichos puntos.

2.1 Principio de nivelación

Se define la altura como la distancia perpendicular entre un punto y una superficie de referencia, pero en el contexto topográfico ésta superficie no es recta sino curva, es así como aparece el siguiente cuestionamiento: ¿cómo medir el desnivel entre puntos de diferente ubicación?

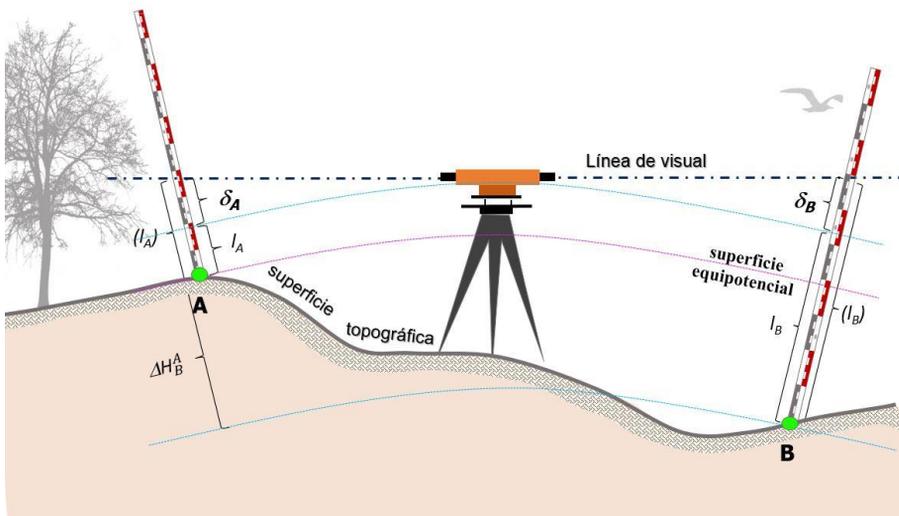


Figura 2. Principio de nivelación ²

Para determinar la diferencia de alturas ΔH_B^A entre dos puntos A y B se disponen miras verticales en dichos puntos y un nivel en medio de ellos. Dado que la superficie equipotencial gravitacional es aproximadamente esférica, el efecto de la curvatura es una función de la distancia entre el instrumento y la mira vertical, cuando las distancias atrás y adelante son iguales, este efecto se cancela,

$$\Delta H_B^A = l_A - l_B = ((l_A) - \delta_A) - ((l_B) - \delta_B) \quad (3)$$

Donde $\delta_A = \delta_B$ (aproximación esférica, en el caso en que las distancias entre A y B sean iguales).

² Fuente: los autores

2.2 Niveles automáticos y basculantes

En las operaciones de nivelación donde se involucre la diferencia de lecturas verticales para hallar el desnivel entre dos puntos, de manera más precisa se hace siempre necesario utilizar un nivel de precisión, se pueden encontrar varios tipos unos más precisos que otros, a continuación, se muestran dos de los más utilizados en las nivelaciones en obras de ingeniería.

2.2.1 Niveles automáticos

Según (Wolf & Ghilani, 2009) los niveles automáticos (Figura 3) cuentan con un dispositivo de auto-nivelación, con el cual el operador realiza una nivelación aproximada al centrar la burbuja circular del instrumento mediante los tornillos de nivelación, luego a través del compensador automático la visual se nivela y se mantiene a nivel en cualquier posición del instrumento, obteniendo una línea visual horizontal.



Figura 3. Nivel automático, Spectra AL24A³

2.2.2 Niveles basculantes

En estos niveles el proceso de verificar su plano horizontal es necesario cada vez que se toma una lectura, a esto se llega a través de una fina coincidencia con el tornillo basculante —*que corrige delicadas inclinaciones del eje de colimación*—, mientras se hace que las dos imágenes partidas de la burbuja se integren en una sola.

³ Fuente: foto tomada por los autores en el laboratorio de topografía Universidad del Quindío



Figura 4. Nivel basculante, Ni 030 Carl Zeiss⁴

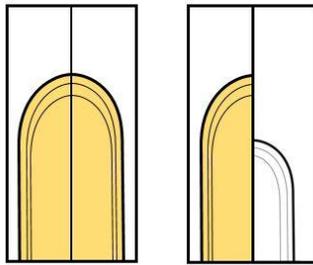


Figura 5. Coincidencia de nivel de burbuja⁵

2.3 Cálculo de desniveles

La diferencia de nivel entre dos puntos puede ser determinada de tres maneras diferentes:

2.3.1 Método del punto extremo

Se coloca el nivel encima de uno de los puntos, por ejemplo, sobre el punto A (elevación conocida) y se mide la altura i del instrumento, o sea, la distancia entre el punto A del terreno y el eje óptico del anteojo. Se coloca la mira sobre el punto B y se efectúa la lectura f de la $V(+)$. La diferencia de nivel entre A y B , será $\Delta H_B^A = Ai - V(+)$

⁴ Fuente: foto tomada por los autores en el laboratorio de topografía Universidad del Quindío

⁵ Fuente: los autores

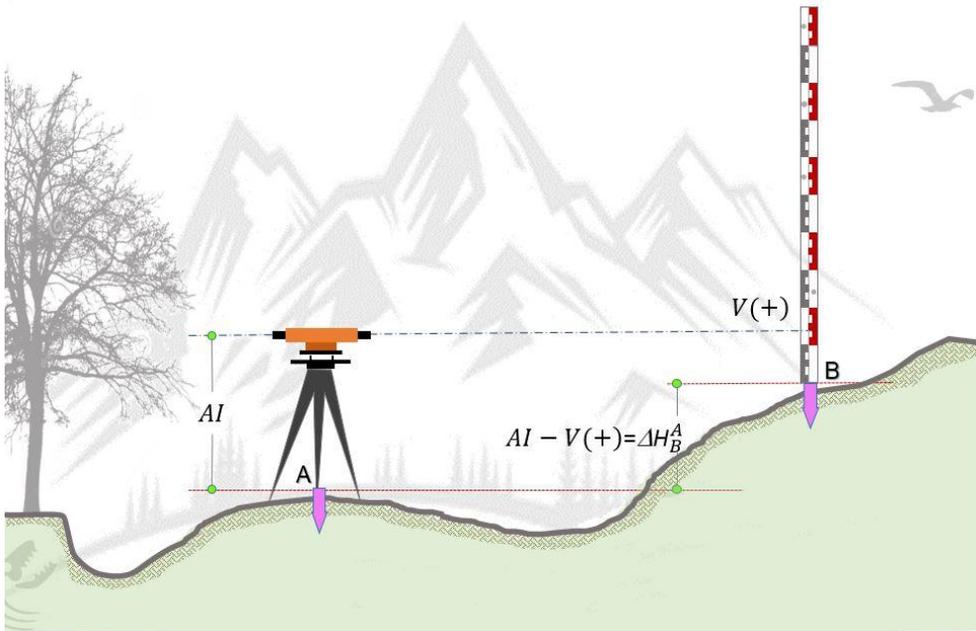


Figura 6. Método del punto extremo⁶

Luego se coloca el instrumento por encima del nuevo punto B y la mira sobre el punto, cuya elevación h_A es conocida, se efectúa la lectura en la mira, con lo que se obtiene la diferencia de altura entre A y B, $\Delta H_B^A = V(+) - AI$

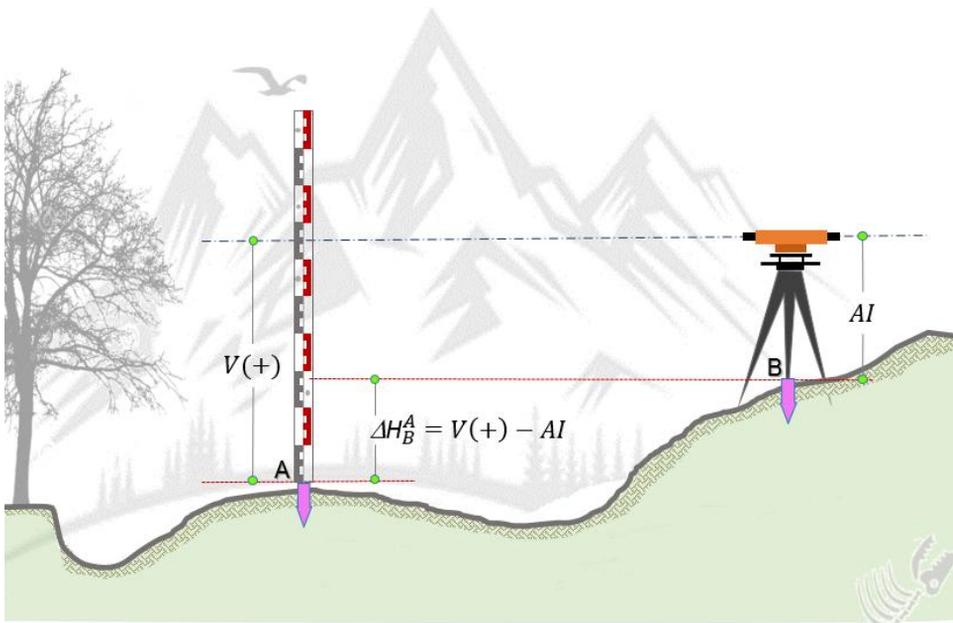


Figura 7. Método del punto extremo, otro punto⁷

⁶ Fuente: los autores

⁷ Fuente: los autores

Para obtener el desnivel definitivo basta con promediar los dos desniveles calculados desde cada uno de los extremos.

2.3.2 Método del punto medio

El instrumento se coloca entre los dos puntos, de manera que las dos distancias a ellos sean más o menos iguales, pero sin preocuparse de que el instrumento se estacione en la línea recta que une los dos puntos. La lectura $V(+)$ (visual de espalda) es efectuada sobre la mira colocada en el punto A ; esta mira se transporta al punto B donde a su vez se hace la lectura $V(-)$. La posición del instrumento no ha sufrido ninguna modificación durante este tiempo. La diferencia de nivel es por consiguiente: $\Delta H_B^A = V(+)-V(-)$.

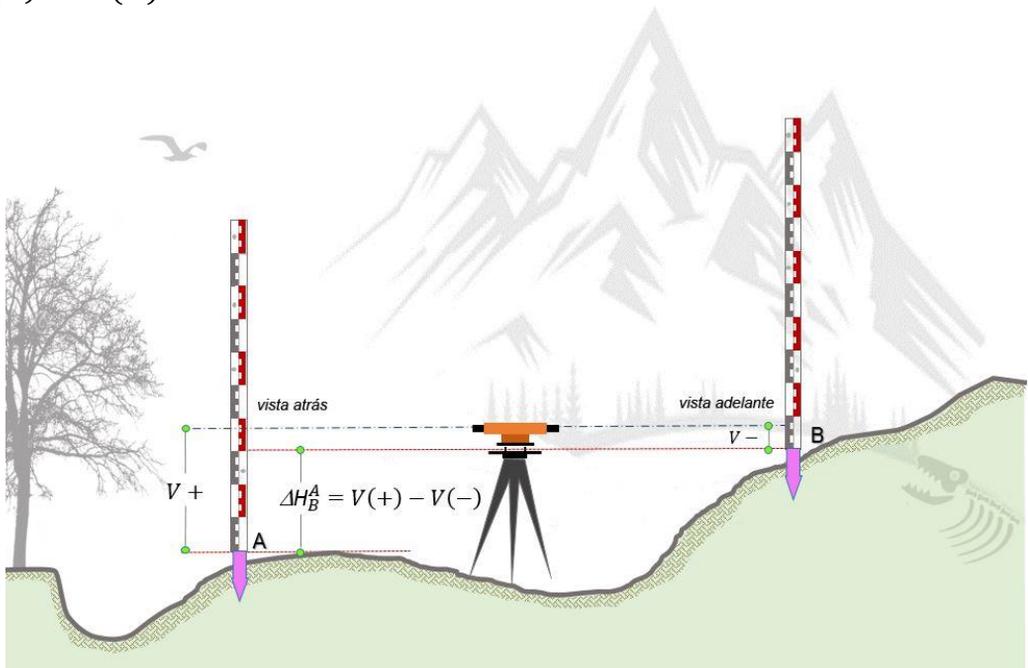


Figura 8. Método del punto medio⁸

2.3.3 Detrás de los puntos

En este caso el terreno impide estacionar el nivel sobre alguno de los dos puntos, o entre ellos. Pero existe la posibilidad de estacionarlo detrás de los puntos A o B . Se efectúa la lectura (de espaldas) en la mira situada sobre A y seguidamente la lectura $V(-)$ (de frente) en B . También en esta forma resulta que la diferencia de nivel entre A y B , será: $\Delta H_B^A = V(+)-V(-)$

⁸ Fuente: los autores

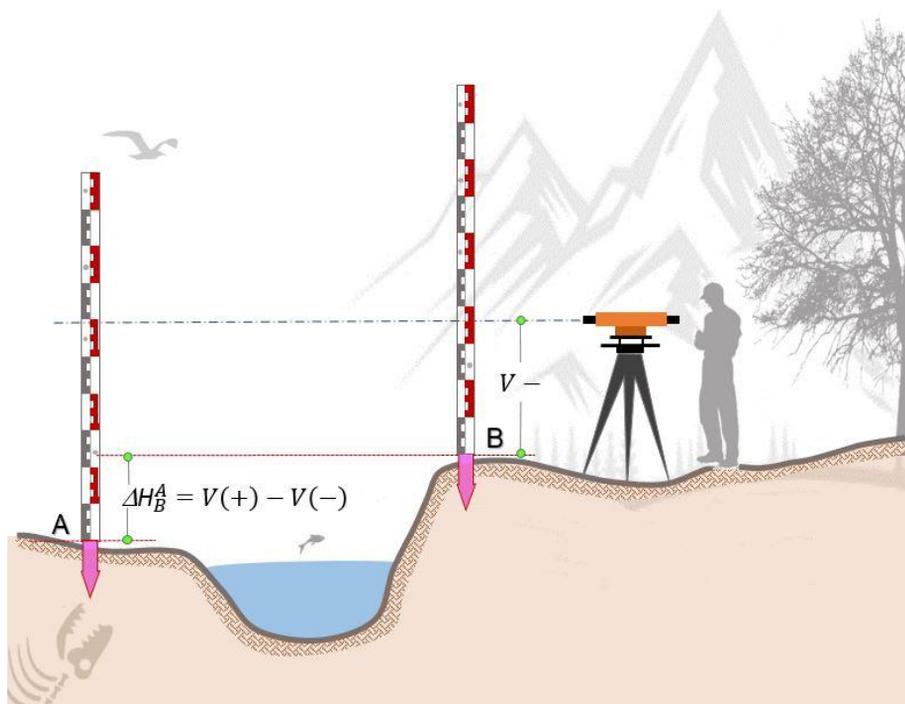


Figura 9. Detrás de los puntos⁹

Ejercicios propuestos

1. Las siguientes lecturas fueron realizadas durante una nivelación desde el punto medio, con nivel de precisión y mira vertical, entre los puntos A y B. La lectura 1,025m $V(+)$ es efectuada sobre la mira colocada en el punto A; luego esta mira se transporta al punto B donde a su vez se hace la lectura 2,028 $V(-)$. La posición del instrumento (punto medio entre A y B) no ha sufrido ninguna modificación durante este tiempo. Calcular el desnivel entre A y B. Realice un gráfico de esta situación.
2. En el siguiente ejercicio el terreno impide estacionar el nivel sobre alguno de los dos puntos, o entre ellos. Pero existe la posibilidad de estacionarlo detrás del punto A. Se efectúa la lectura 2,035m $V(+)$ en la mira situada sobre A y seguidamente la lectura 1,015m $V(-)$ en B. La posición del instrumento no ha sufrido ninguna modificación durante este tiempo. Calcular el desnivel entre A y B. Realice un gráfico de esta situación.

⁹ Fuente: los autores

3. NIVELACIÓN GEOMÉTRICA

3.1 Nivelación diferencial

Tiene por objeto determinar la diferencia de nivel entre dos puntos, generalmente BMs

Si la distancia que separa dos puntos A y B supera la permitida por el límite máximo de utilización de la mira en función del número de aumentos del telescopio, la diferencia de altura entre los mismos se determina nivelando varios tramos.

Se toman las distancias aproximadamente iguales entre el instrumento y las dos miras, con esto se eliminará cualquier error en las lecturas debido a la curvatura terrestre y la refracción atmosférica, se procede así:

1. Se coloca el instrumento en el punto $S1$.
2. Se ubica la mira completamente vertical en el punto A , se registra la lectura de la $V(+)$.
3. Se gira el instrumento y se coloca la mira en el $C\#1$ sobre una placa, estaca o marca en el terreno. Se toma la lectura y se registra la lectura $V(-)$ en la cartera.

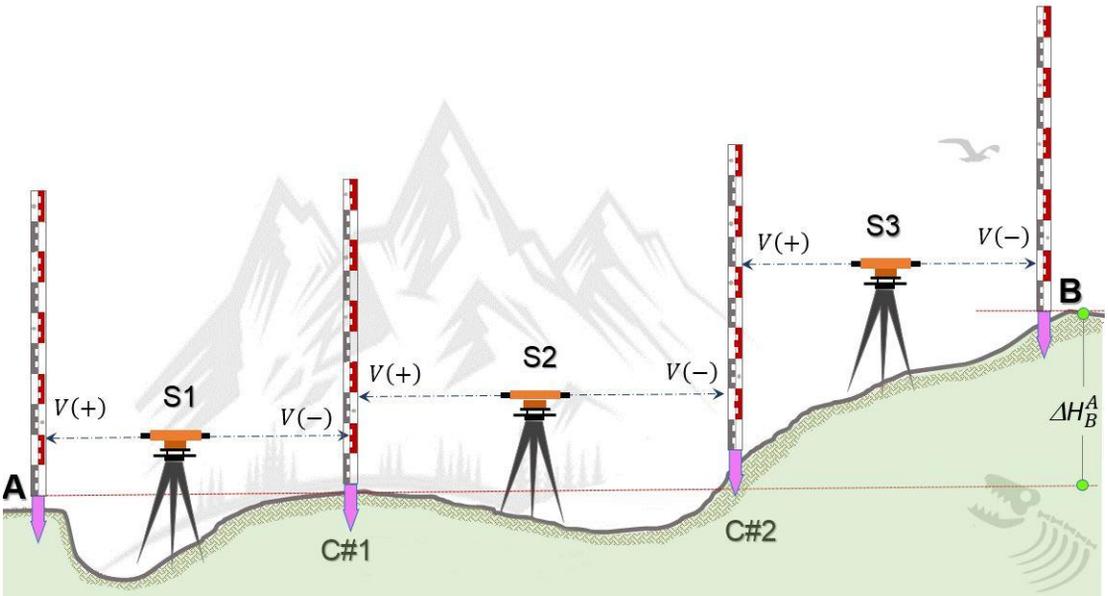


Figura 10. Nivelación diferencial¹⁰

¹⁰ Fuente: los autores

Modelo de cartera

Punto	V+	A i	V-	Elevación						
BM1	1,572	1534,200		1532,628						Bloque Medicina
C#1	1,322	1534,122	1,400	1532,800						
C#2	1,543	1534,314	1,351	1532,771						
C#3	1,579	1534,411	1,482	1532,832						
C#4	1,471	1534,151	1,731	1532,680						
C#5	3,990	1536,846	1,295	1532,856						
C#6	3,475	1539,798	0,523	1536,323						
C#7	3,091	1541,848	1,041	1538,757						
C#8	1,208	1541,495	1,561	1540,287						
BM2			1,430	1540,065						Bloque Ingeniería
Σ	19,251		11,814	1540,065						
	-11,814			-1532,628						
	-----			-----						
Chequeo	7,437			7,437						

- Se coloca el instrumento en el punto S2 (la mira deberá permanecer sobre el C#1).
- Se gira con cuidado la mira sobre el C#1, de manera que mire hacia el instrumento.
- Se toma la lectura de la mira y continúa el mismo procedimiento hasta el punto B.

La diferencia de altura entre los puntos *A* y *B* es igual a la sumatoria de la lecturas atrás $\sum V(+)$, menos la sumatoria de la lecturas adelante $\sum V(-)$.

3.2 Nivelación para obtener un perfil

La nivelación de perfiles longitudinales es la técnica que determina elevaciones de puntos del terreno a intervalos regulares a lo largo de una línea dada.

Suponiendo que ya se ha efectuado el trazado sobre el terreno con estacas cada 10 metros, el topógrafo determina primero, la altura del instrumento, el cual deberá instalarse convenientemente cerca del trazado. Enseguida, se hacen lecturas hacia

adelante $V(-)$ con la mira sobre el terreno, en cada estaca y en los puntos intermedios, donde ocurra un cambio notable en la pendiente del terreno.

Puesto que estas lecturas de la mira sobre el terreno se efectúan únicamente para fines de dibujo y no para determinar elevaciones de los BMs, se anota solo hasta el centímetro.

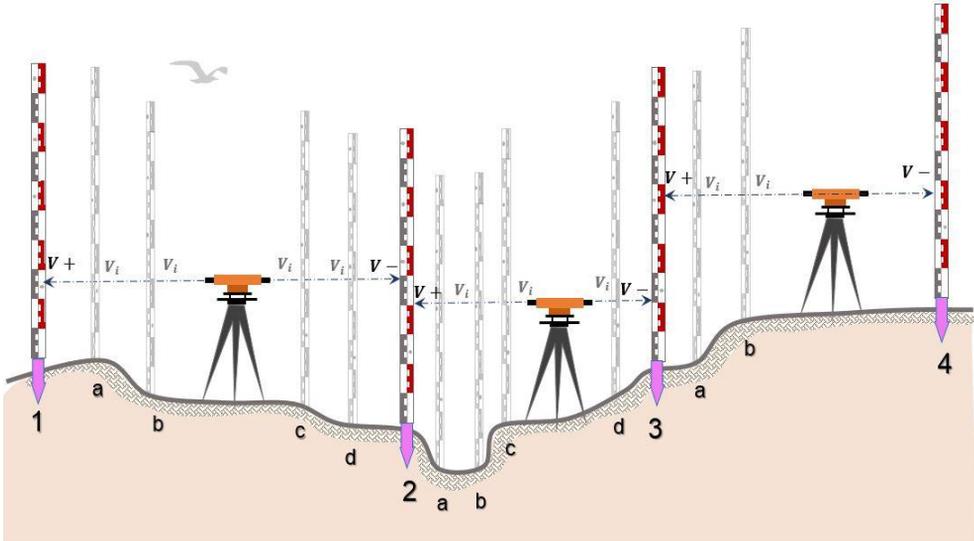


Figura 11. Nivelación para obtener un perfil¹¹

Así pues, todas las elevaciones de las estaciones del terreno se calculan también hasta el centímetro.

Modelo de cartera

Punto	V+	A i	V-	Vi	Elevación					
BM1	1,761	501,761			500,000	Mojón 1, B. Ingeniería U. Q.				
KO+190				1,54	500,22					
C#1, KO+195,20	3,987	504,733	1,015		500,75					
KO+200				0,73	504,00					
C#2, Ko+209,45	2,907	506,966	0,674		504,059					
KO+210				1,49	505,48					
KO+220				1,04	505,93					
KO+230				0,14	506,83					
c#3, KO+240	3,921	510,787	0,100		506,866					
BM2			2,630		508,157	Mojón 2 B. Medicina U. Q.				
	12,576		4,419		508,157					
	-4,419				500,000					
	8,157	←	Chequeo	→	8,157					

¹¹ Fuente: los autores

3.3 Nivelación recíproca

Consiste en una nivelación doble estacionando sucesivamente en A y B tomando lecturas a la mira.

Para eliminar los efectos del error residual (e) y los efectos de esfericidad y refracción, se aplica el método de estaciones recíprocas, duplicando el número de estaciones, y mejorando la precisión.

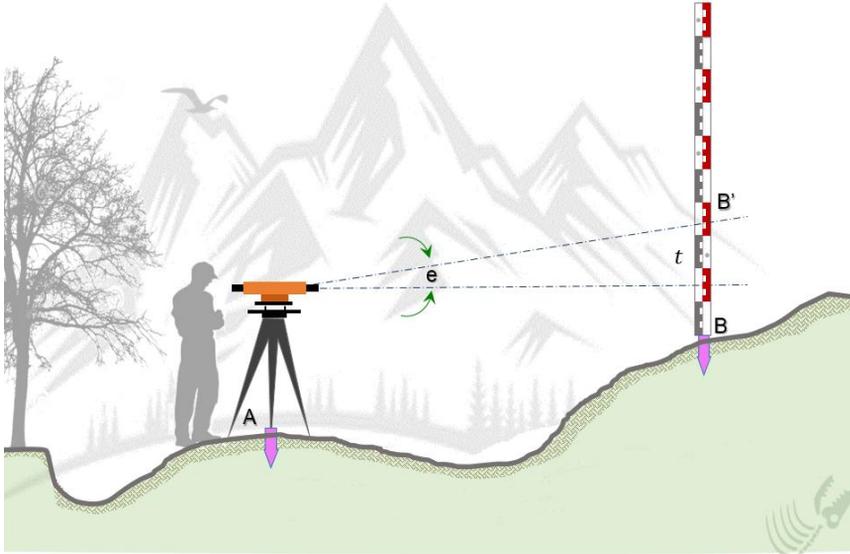


Figura 12. Nivelación recíproca, situación (a)¹²

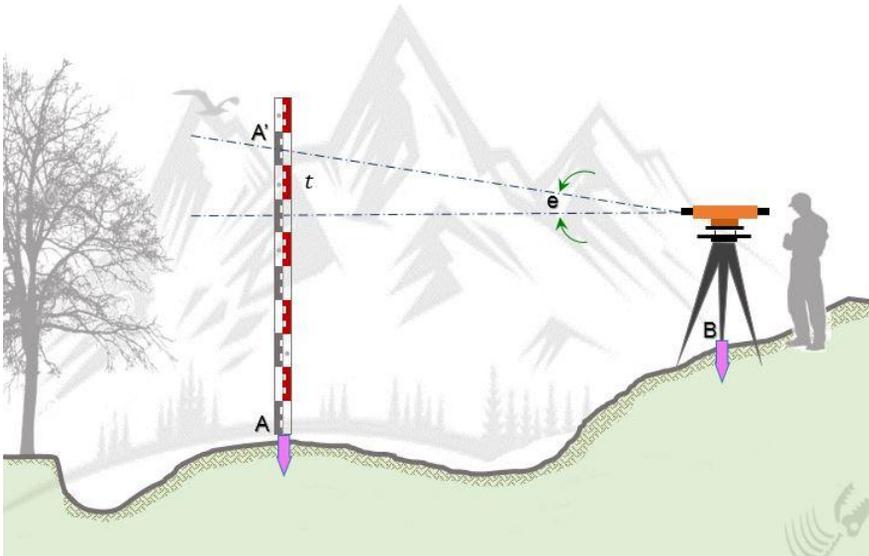


Figura 13. Nivelación recíproca¹³

¹² Fuente: los autores

¹³ Fuente: los autores

Sean los puntos A y B las referencias cuyo desnivel se pretende determinar. Se efectúa en primer lugar la observación desde A a B , situación (a), por el método del punto extremo. Se supone una visual que corta a la mira en B' , con un error residual del nivel (e), que causa un error t en la lectura mira B (m_B).

Bajo esta condición el desnivel ΔH_A^B , vendrá dado por:

$$\Delta H_A^B = i_A - (m_B - t) \quad (4)$$

Luego se realiza otra observación invirtiendo las posiciones relativas del instrumento y mira (situado en B) y el desnivel en esta ocasión, A

$$\Delta H_A^B = i_B - (m_A - t) \quad (5)$$

Los desniveles corresponden a las direcciones directa y recíproca, por lo que tendrán signos contrarios. Para promediarlos se restan. El desnivel final, promedio de ambos valores, será:

$$\frac{\Delta H_A^B - \Delta H_B^A}{2} = \Delta H_A^B \quad (6)$$

Se comprueba que en este desnivel queda eliminado el término t , es decir el error en las lecturas como consecuencia del error residual que exista en el instrumento de medición.

3.4 Nivelación con tres hilos

Este método, consiste en leer los tres hilos con el nivel de precisión y comparar la diferencia entre el hilo superior (HS) y medio (HM) con la diferencia entre el hilo inferior (HI) y el hilo medio para evitar equivocaciones. Otra forma es el promedio del hilo superior y el inferior el cual debe ser igual teóricamente al medio. Con la lectura de hilos inferior y superior y la constatación del nivel, se puede obtener la distancia de cada uno de los tramos observados, para determinar la longitud total de la nivelación. Antiguamente se usó para nivelaciones de precisión, pero no correspondía a las precisiones requeridas, por lo cual actualmente se usa en nivelación de precisión ordinaria, y su gran ventaja es la posibilidad de no cometer equivocaciones ya que permite la verificación de las lecturas, porque es el promedio de dos observaciones por lo cual permite calcular las distancias de las visuales adelante y atrás para mantener el balance necesario para el ajuste de redes o itinerarios de nivelación, da la posibilidad de usar sus distancias en la obtención de pesos, para realizar los ajustes en función de estos.

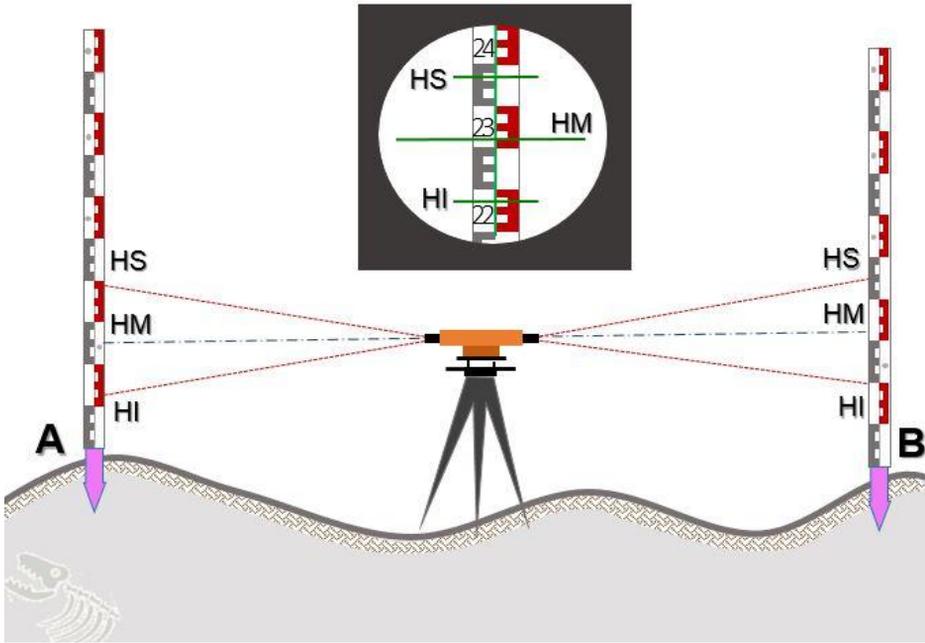


Figura 14. Nivelación con tres hilos¹⁴

Cálculos:

$$Vista(+)=\frac{V(+)_HS+V(+)_HM+V(+)_HI}{3} \quad (7)$$

Comprobación de la lectura:

$$(V(+)_HS - V(+)_HM) : (V(+)_HM - V(+)_HI)$$

La diferencia entre ellas debe ser mínima. No mayor a 2 mm

Vista (-):

$$Vista(-)=\frac{V(-)_HS+V(-)_HM+V(-)_HI}{3} \quad (8)$$

Comprobación de la lectura:

$$(V(-)_HS - V(-)_HM) : (V(-)_HM - V(-)_HI)$$

¹⁴ Fuente: los autores

Modelo de cartera

Punto	V+	Mira	V-	Mira	Elevación					
BMA					125,0400	Bloque de ingeniería				
	0,762		2,289							
	0,727	0,035	2,191	0,098	0,7223					
	0,678	0,049	2,112	0,079	125,7623					
	2,167		6,592		-2,1973					
	0,7223		2,1973							
C#1					123,5650					
	1,146		2,152							
	1,085	0,061	2,118	0,034	1,0850					
	1,024	0,061	2,083	0,035	1,0850					
	3,255		6,353		-2,1177					
	1,0850		2,118							
C#2					124,6500					
	1,653		2,192							
	1,599	0,054	2,148	0,054	1,5987					
	1,544	0,055	2,082	0,056	124,1310					
	4,796		6,412		-2,1373					
	1,5987		2,1373							
BM B					126,2683	Bloque de Educación				

3.5 Nivelación de puntos en el techo

Según (Irvine, 1975) es frecuente en las construcciones la necesidad de hallar niveles de puntos que se hallan encima de la línea de la visual como niveles por debajo de puentes, pasos superiores, losas, tejados, minas o aleros de edificios.

La lectura en la mira invertida se registra con signo negativo, de manera que cuando esta se reduce desde la altura de colimación del nivel, se obtiene:

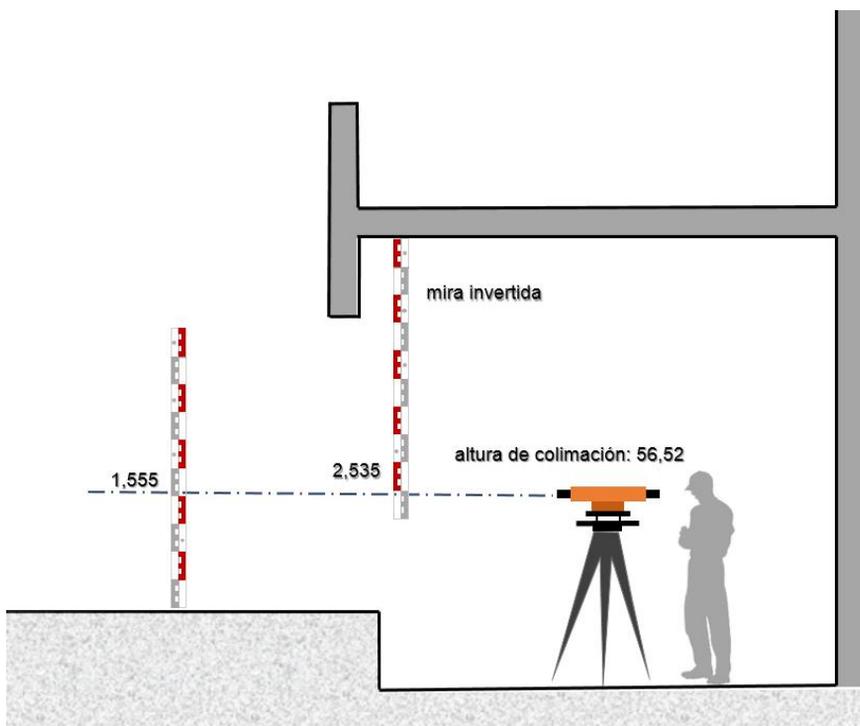


Figura 15. Nivelación con puntos en el techo y el suelo¹⁵

$$\text{Elevación del techo (A)} = 56,52 - (-2,535) = 59,055$$

$$\text{Elevación del piso} = 56,52 - (+1,555) = 54,965$$

Ejemplo:

En la nivelación de cuatro puntos que pasan por debajo de una estructura existente en una mina subterránea, se localizó un punto de referencia en el borde inferior del techo de una galería, Calcule las cotas de los puntos *A*, *B*, *C* y *Ref2*. Teniendo en cuenta que la elevación de *Ref1* es $-154,328\text{ m}$. Realizar la respectiva cartera de campo y su comprobación.

¹⁵ Fuente: los autores

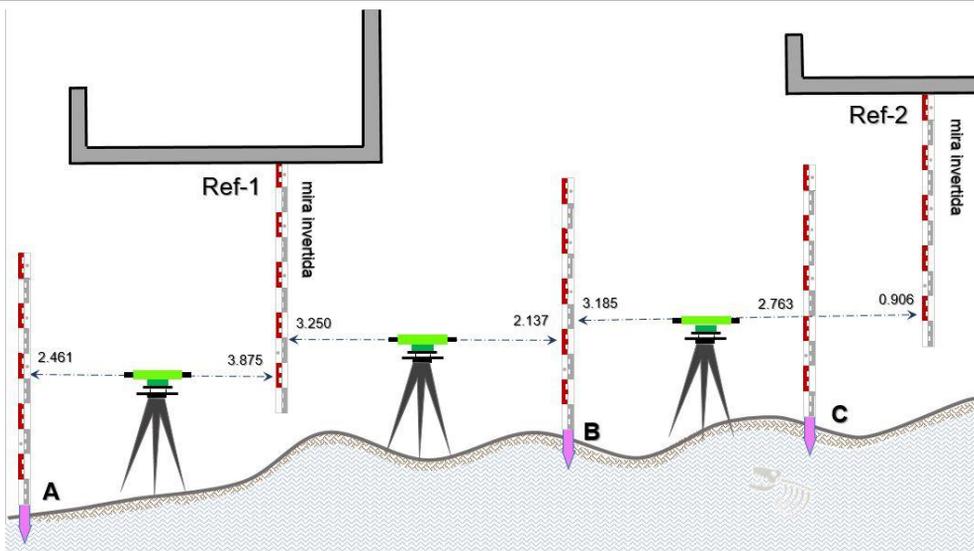


Figura 16. Ejemplo¹⁶

Punto	V+	AI	VI	V-	Elevación	Obs.							
A	2,461					Piso							
REF 1	3,250			3,875		Techo							
B	3,185			2,137		Piso							
C			2,763			Piso							
REF 2				0,906		Techo							

Solución

Primero se soluciona la parte donde se conoce la cota hacia abajo. Teniendo en cuenta si la $V(+)$ y $V(-)$ están en el techo y se coloca el respectivo signo.

Punto	V+	AI	VI	V-	Elevación	Obs.							
A	+2,461					Piso							
REF -1	-3,250			+3,875	-154,328	Techo							
B	+3,185	-157,578		-2,137	-159,715	Piso							
C		156,530	(-)2,763		-159,293	Piso							
REF -2				+0,906	-155,624	Techo							
$\Sigma V+$	+2,396			$\Sigma V-$	+2,644								
		$\Sigma(V+)+\Sigma(V-)$	5,04 m										

¹⁶ Fuente: los autores

Se despeja la cota inicial de la ecuación de comprobación

$$\sum (v +) + \sum (v -) = CF - CI$$

Quedando $CI = -(\sum(v +) + \sum(v -)) + CF$ donde,

$$CI = -(5,04) + (-155,624m) = -160,664m$$

-155,624 m Cota final

-160,664 m Cota inicial

Luego, se coloca la cota inicial y se resuelve lo faltante. Finalmente se comprueba con la cota de la *Ref1*

Punto	V+	AI	VI	V-	Elevación	Obs.				
A	2,461	-158,203			-160,664	Piso				
REF1	3,250	-157,578		3,875	-154,328	Techo				
B	3,185	-157,578		2,137	-159,715	Piso				
C			2,763		-159,293	Piso				
REF2				0,906	-155,624	Techo				

3.6 Métodos de comprobación

3.6.1 Nivelación y contra - nivelación

Es la ejecución de dos nivelaciones una de ida y otra de regreso, puede ser por los mismos puntos o por otros diferentes, pero, el de salida y el de llegada deberán ser los mismos.



Figura 17. Nivelación y contra nivelación¹⁷

3.6.2 Doble punto de cambio

También llamado método de *Cholesky*, de este modo se hace lo mismo que la nivelación anterior, pero con la diferencia de que las dos nivelaciones se llevan de manera simultánea, tienen en común la primera y última lecturas, se puede llevar en una sola página o en páginas separadas para evitar equivocaciones.

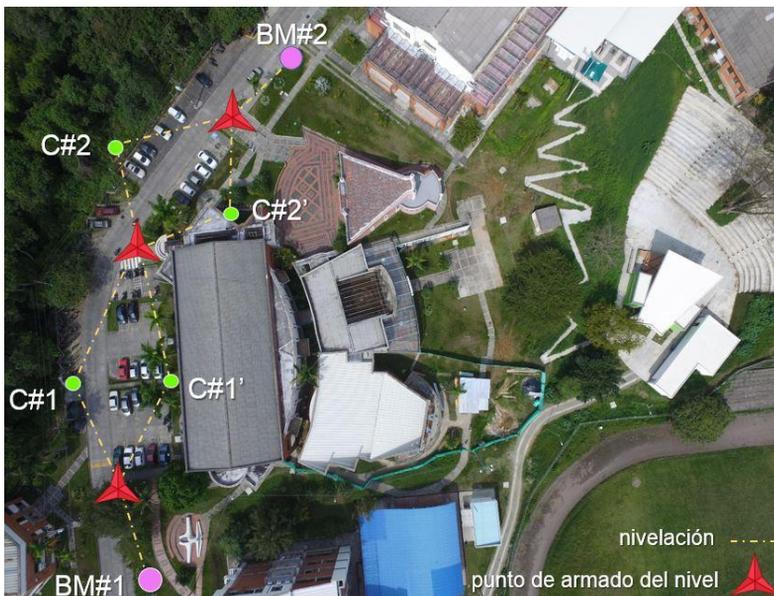


Figura 18. Doble punto de cambio¹⁸

¹⁷ Fuente: fotografía tomada por los autores campus Universidad del Quindío

¹⁸ Fuente: fotografía tomada por los autores campus Universidad del Quindío

Modelo de cartera

Punto	V+	A i	V-	Elevación	Punto	V+	A i	V-	Elevación
BM1	0,875	504,875		504,000	BM1	0,875	504,875		504,000
C#1	1,483	504,988	1,370	503,505	C#1'	1,973	504,988	1,860	503,015
C#2	0,732	504,570	1,150	503,838	C#2'	1,938	504,576	2,350	502,638
BM2			1,980	502,590	BM2			1,980	502,596
Σ	3,090		4,500			4,786		6,190	
	Δ :	-1,410				Δ :	-1,404		
BM2 -	BM1	-1,410	Ok		BM2 -	BM1	-1,404	Ok	

3.6.3 Doble altura instrumental

En este procedimiento las nivelaciones que se llevan, quedan totalmente independientes, pues se van comprobando las diferencias de lecturas entre los cambios consecutivos, no tienen en común ninguna lectura, como en el caso anterior, se pueden realizar dos o más nivelaciones.



Figura 19. Doble altura instrumental¹⁹

¹⁹ Fuente: fotografía tomada por los autores campus Universidad del Quindío

Modelo de cartera

Punto	V+	A i	V-	Elevación	Punto	V+	A i	V-	Elevación
BM1	1,440	505,440		504,000	BM1	1,860	505,860		504,000
C#1	3,180	505,920	2,700	502,740	C1'	3,840	506,580	3,120	502,740
C#2	3,430	507,570	1,780	504,140	C2'	3,700	507,830	2,450	504,130
BM2			1,200	506,370	BM2			1,480	506,350
Σ	8,050		5,680		Σ	9,400		7,050	
	Δ:	2,370				Δ:	2,350		
BM2	-BM1	2,370	Ok		BM2	-BM1	2,350	Ok	

3.6.4 Especificaciones de nivelación diferencial de tercer orden

Operación / Especificación	Nivel de compensador Observación con tres hilos	Nivel de compensador Observación con un hilo	Electrónico / Digital Nivel de código de barras
Separación de miras atrás y adelante.	10 m	10 m	10 m
Diferencia acumulada en la longitud entre las miras anteriores y posteriores, que no debe exceder por ciclo o sección	10 m	10 m	10 m
Longitud máxima de visual.	91,44 m	91,44 m	91,44 m
Mínima separación del suelo a la línea de visual	0,50 m	0,50 m	0,50 m
Cierre máximo de la sección	$0,018 \cdot \sqrt{D}$	$0,018 \cdot \sqrt{D}$	$0,012 \cdot \sqrt{D}$
Cierre máximo del ciclo	0,30 de la unidad de la mira	N/A	N/A
Prueba de colimación (dos visuales)	Diariamente (sin exceder 0,002 m)	Diariamente	Diariamente
Número mínimo de lecturas. (Use la opción repetir medida para cada observación)	N/A	N/A	3

Tabla 1. Especificaciones de nivelación

Notas:

1. En condiciones de retroiluminación se puede disminuir la distancia de visión máxima.
2. D: longitud de ida más corta de la sección en kilómetros (sección se define como una serie de medidas entre dos puntos de control permanente).
3. E: Longitud del ciclo en kilómetros (el ciclo se define como una serie de configuraciones que se cierran en el punto inicial).
4. Volver a ajustar el nivel si se supera 0,002 m de 61 m. Si el error estándar de la media excede 0,001 m, continúe repitiendo las mediciones hasta que el error estándar de la media sea menor a 0,001 m. (Committee, Federal Geodetic Control, 1990)

Ejercicios propuestos

1. La tabla presentada a continuación corresponde a una nivelación en la mina El Amparo, que involucra varios puntos, comenzando en el BM-1 y terminando en el BM-3, la cota conocida del BM-2 es 2,345m, calcular las cotas de todos los puntos y realizar la respectiva comprobación. Nota las lecturas son en metros.

Pto	V+	A.I.	V.I.	V-	Elevación	Observación
BM-1	2,345					Punto techo mina el salado
C#1	2,546			1,804		Cambio situado en el piso
A			1,609			Techo bocamina el amparo
C#2	2,098			3,209		Cambio situado en el techo
B			0,798			Punto piso en patio de mina
C			2,798			Esquina de casino (piso)
D			1,698			Piso bocamina el loro
BM-2	2,789			1,905		Punto techo mina la y
C#3	2,980			1,209		Cambio punto el cinco (piso)
C#4	1,978			2,543		Cambio techo túnel de acero
E			3,409			Centro del parque (piso)
C#5	3,190			2,809		Cambio situado en el piso
F			2,987			Punto ferrocarril (piso)
BM-3				1,908		Techo bocamina icacales

2. Calcular el desnivel entre A-B; A-C; B-C; C-A

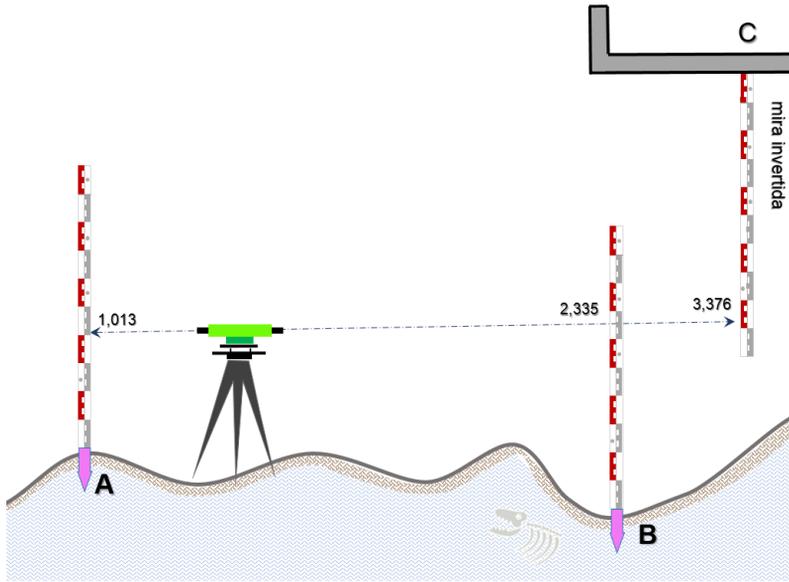


Figura 19A. Ejemplo²⁰

²⁰ Figura 19. Doble

4. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA Y ESTADIMÉTRICA

4.1 Nivelación trigonométrica

Es un método altimétrico para determinar el desnivel de un punto respecto de otro, midiendo la distancia inclinada o el ángulo de pendiente de la visual, junto con la distancia entre ambos puntos.

Se define como el método altimétrico que utiliza la medición de distancias y ángulos para calcular el desnivel entre dos puntos, mediante las funciones trigonométricas, teniendo en cuenta la altura instrumental y la altura del prisma como se observa en la siguiente figura.

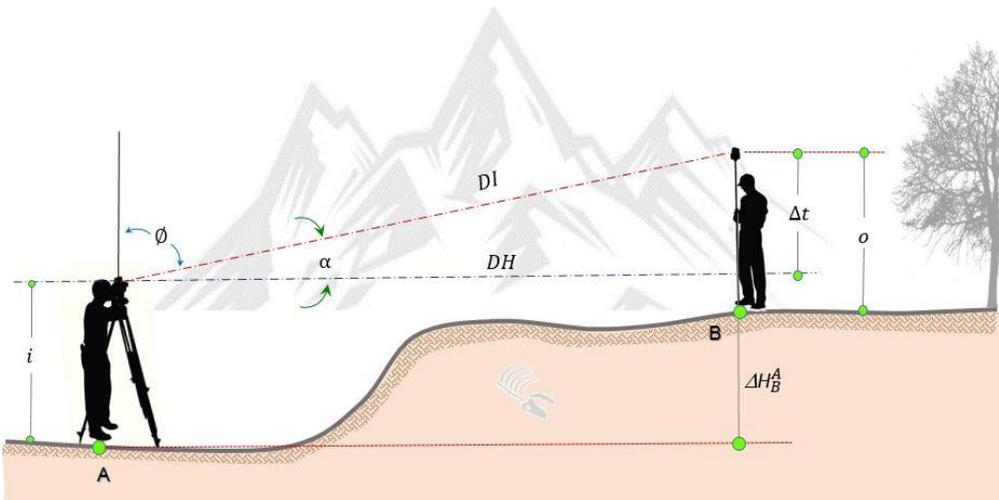


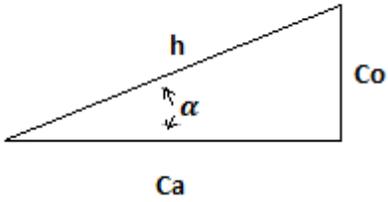
Figura 20. Nivelación trigonométrica²¹

\emptyset : ángulo cenital
 DI : distancia inclinada
 i : altura instrumental
 Δt : desnivel del triángulo

α : ángulo vertical
 DH : distancia horizontal
 o : altura del prisma
 ΔH_B^A = desnivel entre A y B.

Para calcular el desnivel entre los puntos A y B se utilizan las funciones trigonométricas de los triángulos rectángulos entre ellas el seno, coseno, tangente y cotangente.

²¹ Fuente: los autores



$$\text{sen } \alpha = \frac{Co}{h}$$

donde Co : longitud del cateto opuesto

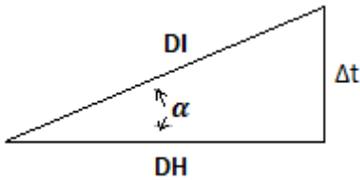
$$\text{cos } \alpha = \frac{Ca}{h}$$

h : longitud de la hipotenusa

$$\text{tan } \alpha = \frac{Co}{Ca}$$

Ca : longitud del cateto adyacente

Para temas topográficos se cambia la notación así:



$Co = \Delta t$; $Ca = DH$; $h = DI$.

Quedando de la siguiente forma:

$$\text{Sen } \alpha = \frac{\Delta t}{DI}$$

donde Δt : desnivel del triángulo

$$\text{cos } \alpha = \frac{DH}{DI}$$

DI : distancia inclinada

$$\text{tan } \alpha = \frac{\Delta t}{DH}$$

DH : distancia horizontal

De esta manera se encuentran cuatro casos de acuerdo a los datos tomados en campo.

Caso 1: Cuando se mide en campo la distancia horizontal DH y el ángulo vertical α

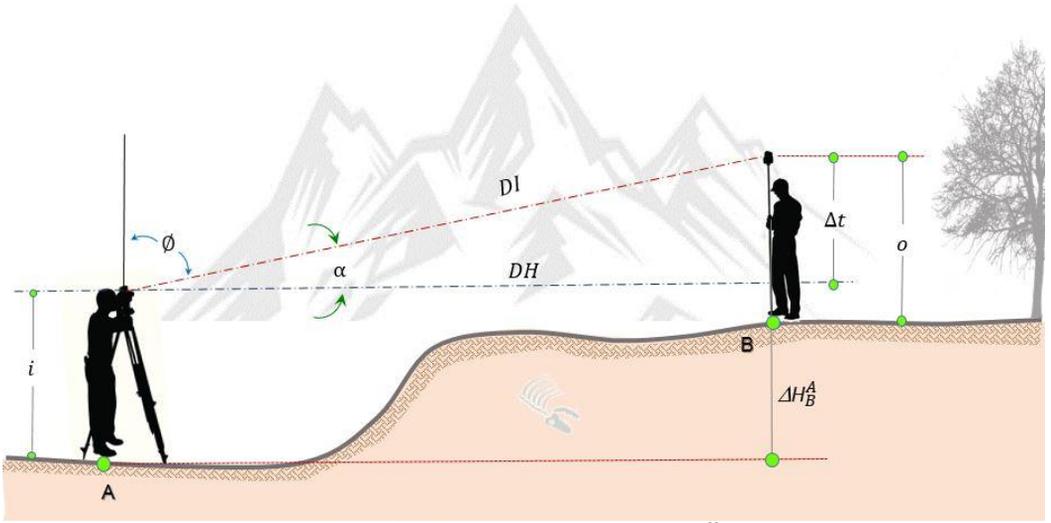


Figura 21. Nivelación trigonométrica caso 1²²

$$\tan \alpha = \frac{Co}{Ca}$$

} 1 función trigonométrica tangente.

$$\tan \alpha = \frac{\Delta t}{DH}$$

} 2 cambiando la notación.

$$\Delta t = DH \cdot \tan \alpha$$

} 3 despejando Δt .

Ahora hay que tener en cuenta la altura instrumental y la altura del prisma para hallar el desnivel del terreno, es decir el desnivel entre los puntos A y B.

$$\Delta_B^A = \Delta t + (i - o)$$

} 4 sumando la diferencia de la altura instrumental y la altura del prisma.

$$\Delta_B^A = DH \cdot \tan \alpha + (i - o)$$

} 5 reemplazando $\Delta t = DH \cdot \tan \alpha$
Se obtiene la ecuación de la nivelación trigonométrica; caso uno.

$$\Delta_B^A = DH \cdot \tan \alpha + (i - o) \quad (9)$$

²² Fuente: los autores

Caso 2: Cuando se mide en campo la distancia inclinada DI y el ángulo vertical α

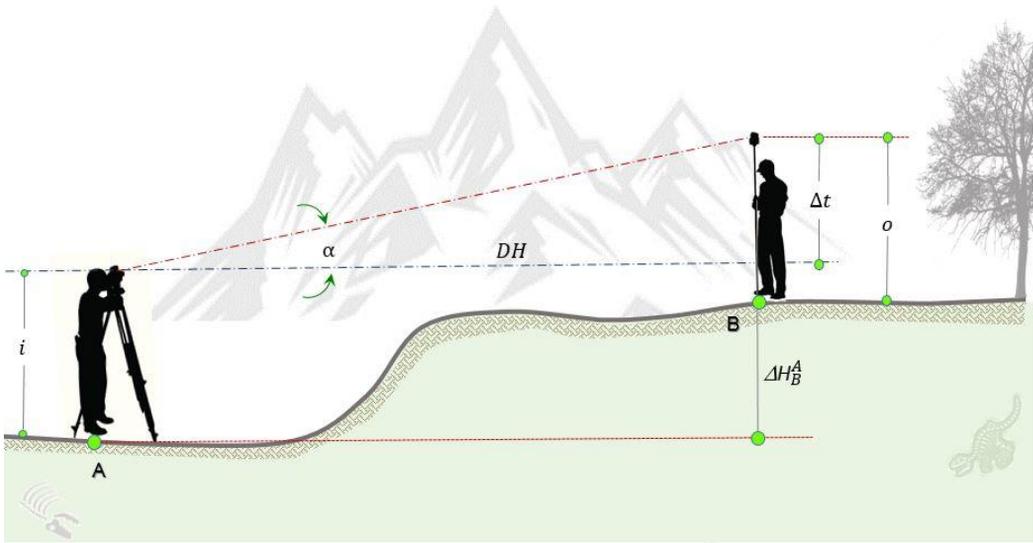


Figura 22. Nivelación trigonométrica caso 2²³

$$\text{sen } \alpha = \frac{Co}{h}$$

} 1 función trigonométrica seno.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\Delta t}{DI}$$

} 2 cambiando la notación.

$$\Delta t = DI \cdot \text{sen } \alpha$$

} 3 despejando Δt .

Ahora hay que tener en cuenta la altura instrumental y la altura del prisma para hallar el desnivel del terreno es decir el desnivel entre los puntos A y B.

$$\Delta_B^A = \Delta t + (i - o)$$

} 4 sumando la diferencia de la altura instrumental y la altura del prisma.

$$\Delta_B^A = DI \cdot \text{sen } \alpha + (i - o)$$

} 5 reemplazando $\Delta t = DI \cdot \text{sen } \alpha$
Se obtiene la ecuación de la nivelación trigonométrica; caso dos.

²³ Fuente: los autores

$$\Delta t_n = DI \cdot \text{sen } \alpha + (i - o) \quad (10)$$

Caso 3: Cuando se mide en campo la distancia horizontal DH y el ángulo cenital θ

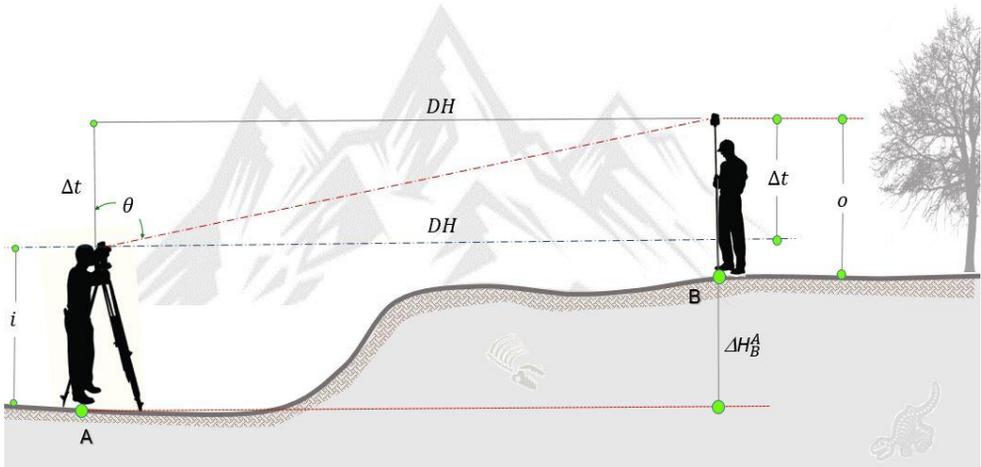


Figura 23. Nivelación trigonométrica caso 3²⁴

$$\tan \theta = \frac{Co}{Ca} \quad \} \mathbf{1} \text{ función trigonométrica tangente.}$$

$$\tan \theta = \frac{DH}{\Delta t} \quad \} \mathbf{2} \text{ cambiando la notación.}$$

$$\Delta t = \frac{DH}{\tan \theta} \quad \} \mathbf{3} \text{ despejando } \Delta t.$$

Ahora al igual que en los casos anteriores hay que tener en cuenta la altura instrumental y la altura del prisma para hallar el desnivel del terreno, es decir el desnivel entre los puntos A y B.

$$\Delta_B^A = \Delta t + (i - o) \quad \} \mathbf{4} \text{ sumando la diferencia de la altura instrumental y la altura del prisma.}$$

²⁴ Fuente: los autores

$$\Delta_B^A = DH \cdot \frac{1}{\tan \theta} + (i - o)$$

} **5** reemplazando $\Delta t = DH \cdot \frac{1}{\tan \theta}$

Se obtiene la ecuación de la nivelación trigonométrica; caso tercero.

$$\Delta_B^A = DH \cdot \cot \theta + (i - o) \quad (11)$$

Caso 4: Cuando se mide en campo la distancia inclinada DI y el ángulo cenital θ

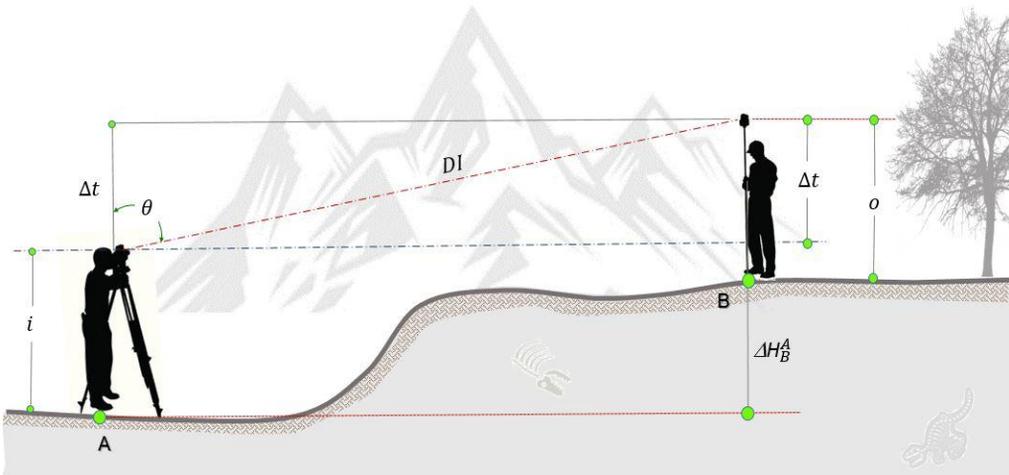


Figura 24. Nivelación trigonométrica caso 4²⁵

$$\cos \theta = \frac{ca}{h}$$

} **1** función trigonométrica coseno.

$$\cos \theta = \frac{\Delta t}{DI}$$

} **2** cambiando la notación.

$$\Delta t = DI \cdot \cos \theta$$

} **3** despejando Δt .

²⁵ Fuente: los autores

Como se ha referido en los casos anteriores es necesario tener en cuenta la altura instrumental y la altura del prisma para hallar el desnivel del terreno es decir el desnivel entre los puntos A y B .

$$\Delta_B^A = \Delta t + (i - o) \quad \left. \vphantom{\Delta_B^A} \right\} 4 \text{ sumando la diferencia de la altura instrumental y la altura del prisma.}$$

$$\Delta_B^A = DI \cdot \cos \theta + (i - o) \quad \left. \vphantom{\Delta_B^A} \right\} 5 \text{ reemplazando } \Delta t = DI \cdot \cos \theta \text{ se obtiene la ecuación de la nivelación trigonométrica; caso cuarto.}$$

$$\Delta_B^A = DI \cdot \cos \theta + (i - o) \quad (12)$$

Cuando las visuales son de más de 450 metros, se aconseja tomar en cuenta los efectos de curvatura y refracción al calcular la altura.

4.2 Nivelación estadimétrica

Este tipo de nivelación se realiza con un taquímetro (tránsito con hilos estadimétricos), se calculan las posiciones horizontales y verticales de cada punto visado. El procedimiento a emplear consiste en leer en cada posición de la mira:

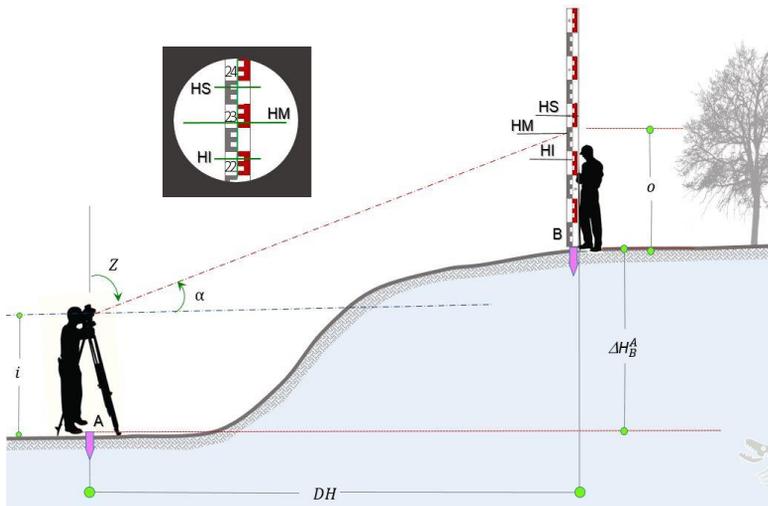


Figura 25. Nivelación estadimétrica²⁶

²⁶ Fuente: los autores

- Los tres hilos *HS, HM, HI*.
- El círculo vertical
- El círculo horizontal, (se utiliza para determinar la posición planimétrica).
- La altura instrumental (*i*)

La demostración de la fórmula de la nivelación estadimétrica, se utiliza tanto para ángulos cenitales como para verticales.

Para ángulos verticales

Sea α = ángulo vertical

$$DH = K \cdot L \cdot \cos^2(\alpha)$$

} **1** Ecuación de la distancia horizontal por estadimetría para ángulo vertical.

$$\Delta_B^A = DH \cdot \tan(\alpha) + i - o$$

} **2** Ecuación del desnivel por nivelación trigonométrica para ángulo vertical.

$$\Delta_B^A = K \cdot L \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \tan(\alpha) + i - o$$

$$\Delta_B^A = K \cdot L \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} + i - o$$

} **3** Reemplazar la ecuación uno en la ecuación dos. Identidad trigonométrica $\tan(\alpha) = \frac{\text{Sen}(\alpha)}{\text{Cos}(\alpha)}$, simplificar.

$$\Delta_B^A = K \cdot L \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha) + i - o$$

$$\frac{2}{2} \Delta_B^A = \frac{2}{2} \cdot [K \cdot L \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha) + i - o]$$

} **4** multiplicar por $\frac{2}{2}$ ambos o miembros. Simplificar

$$\Delta_B^A = \frac{1}{2} \cdot [K \cdot L \cdot 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)] + i - o \quad \left. \vphantom{\Delta_B^A} \right\} \mathbf{5} \text{ identidad trigonométrica}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

Resultado final ecuación de la nivelación estadimétrica para ángulo vertical.

$$\Delta_B^A = \frac{1}{2} \cdot [K \cdot L \cdot \sin(2\alpha)] + i - o \quad (13)$$

Para ángulos cenitales

Sea θ : ángulo cenital

$$DH = K \cdot L \cdot \sin^2(\theta) \quad \left. \vphantom{DH} \right\} \mathbf{1} \text{ Ecuación de la distancia horizontal por estadimetría para ángulo cenital.}$$

$$\Delta_B^A = DH \cdot \frac{1}{\tan(\theta)} + i - o \quad \left. \vphantom{\Delta_B^A} \right\} \mathbf{2} \text{ Ecuación del desnivel por nivelación trigonométrica para ángulo cenital. Relación trigonométrica } \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

$$\Delta_B^A = K \cdot L \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cot(\theta) + i - o$$

$$\Delta_B^A = K \cdot L \cdot \sin^2(\theta) \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + i - o \quad \left. \vphantom{\Delta_B^A} \right\} \mathbf{3} \text{ Reemplazar la ecuación uno en la ecuación dos. Identidad trigonométrica } \cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \text{ . Simplificar.}$$

$$\Delta_B^A = K \cdot L \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + i - o$$

$$\frac{2}{2} \Delta_B^A = \frac{2}{2} \cdot [K \cdot L \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + i - o] \quad \left. \vphantom{\Delta_B^A} \right\} \mathbf{4} \text{ multiplicar por } \frac{2}{2} \text{ ambos miembros. Simplificar}$$

$$\Delta_B^A = \frac{1}{2} \cdot [K \cdot L \cdot 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)] + i - o \quad \left. \vphantom{\Delta_B^A} \right\} \mathbf{5} \text{ Identidad trigonométrica } \sin(2\theta) = 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Resultado final ecuación de la nivelación Estadimétrica para ángulo cenital

$$\Delta_B^A = \frac{1}{2} \cdot [K \cdot L \cdot \text{sen}(2 \cdot \theta)] + i - o \quad (14)$$

Nota: Como se observa se utiliza la misma ecuación para los dos tipos de ángulos cenital y vertical.

4.3 Especificaciones segundo orden (vertical) con estación total

Operación / Especificación	Nivelación trigonométrica
Verificar error de índice vertical	4 veces por día
Utilizar la misma trípode	Requerido
Usar el objetivo la misma de altura	Requerido
Medir la temperatura y la presión - ingrese la corrección de ppm en el instrumento	Configurar la estación por la mañana y al medio día
Observaciones verticales - mínimas	2 directo, 2 inverso
Límite de rechazo angular, rechazar si la diferencia de la media de observaciones cuando exceda	1"
Medir la diferencia de elevación sin corregir	Cada punto
Medir la distancia pendiente sin corregir	Cada punto
Diferencia entre dos diferencias de elevación para cada configuración no debe exceder	0,0015 m
Distancia máxima	0,10 m
Distancia mínima	0,91 m
Diferencia entre las distancias de referencia y el punto no debe exceder	9,14 m

Tabla 2. Especificaciones de segundo orden

Ejercicios propuestos

1. Para calcular la altura de una torre de red eléctrica Figura 26, se niveló con un teodolito localizado en un punto "T" en el valle del terreno con una altura instrumental de 1,5 m. Luego se lanzó una visual a la punta de la torre "P" y se obtuvo un ángulo cenita $Z_1 = 64^\circ 32' 45''$; como no se pudo observar la base de la torre "B" desde la ubicación del teodolito, se colocó allí una mira vertical y se lanzó una visual a ella donde se obtuvo un ángulo cenital $Z_2 = 84^\circ 01' 38''$ y la lectura sobre la mira fue de 3,245 m (HM) y 3,671 m (HS). El ancho de la base cuadrada de la torre es de 3 m, ¿Cuál es la altura de la torre eléctrica?

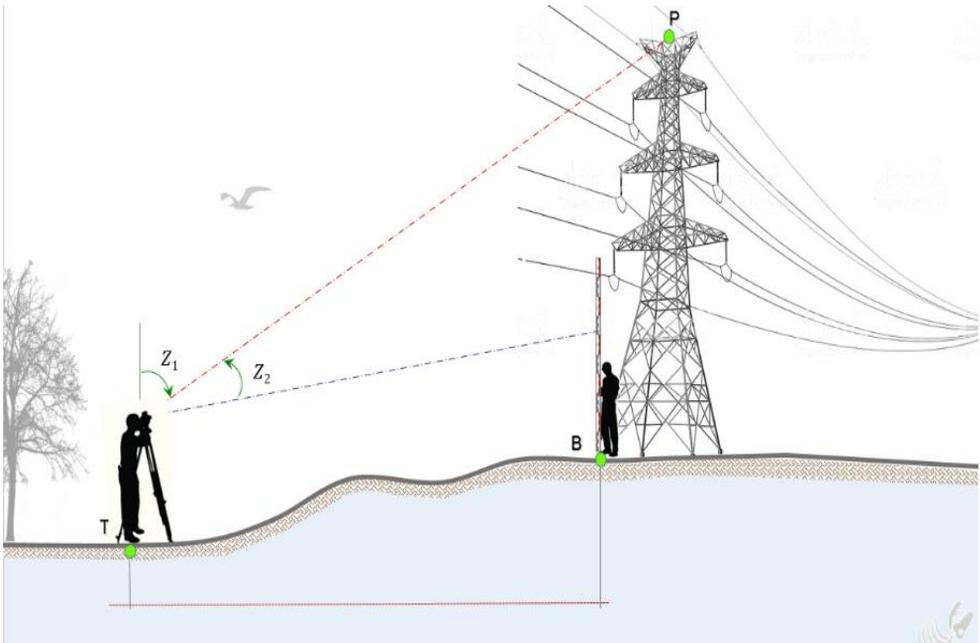


Figura. 26. Nivelación torre red eléctrica.²⁷

2. El siguiente es un fragmento de la cartera de nivelación trigonométrica de un eje:

Δ	Pto	D. Inclinada	D.H.	DN.	Ang. Vertical	A.I.	A. P.	Elevación			
3						1,57		1503,361			
	BM 12	215,09			-05°17'01"		1,57				
	K2+050	45,73			+02°22'07"		1,57				
	K2+060	61,12			+03°28'14"		1,86				
	K2+070	72,27			+02°58'32"		1,57				
	K2+080	80,46			+00°58'32"		1,57				
	K2+090	90,57			+01°36'40"		1,50				
	K2+100	100,85			+02°25'30"		1,50				

Calcular la información faltante en la cartera ($DH - DN - \text{elevación}$)

²⁷ Fuente: los autores

5. DISEÑO DE ESPECIFICACIONES

5.1 Errores sistemáticos en nivelación

5.1.1 Curvatura y refracción

Cuando la luz atraviesa la atmósfera no describe una trayectoria en línea recta, sino que va experimentando sucesivas refracciones ocasionadas por las distintas densidades atmosféricas, este fenómeno produce un efecto curvo sobre las lecturas que se hacen sobre la mira vertical δ_r .

En topografía se acepta la simplificación de la forma de la tierra a una esfera, por tanto, es necesario estimar su efecto sobre la nivelación geométrica, la forma curva de la tierra influye en la nivelación dado que las visuales a las miras son líneas rectas, cuando deberían describir arcos de circunferencia, de tal manera que la visual es tangencial a la línea de nivel, en consecuencia, es necesario aplicar correcciones ocasionadas por la curvatura δ_c y la refracción δ_r cuando las visuales son de gran longitud.

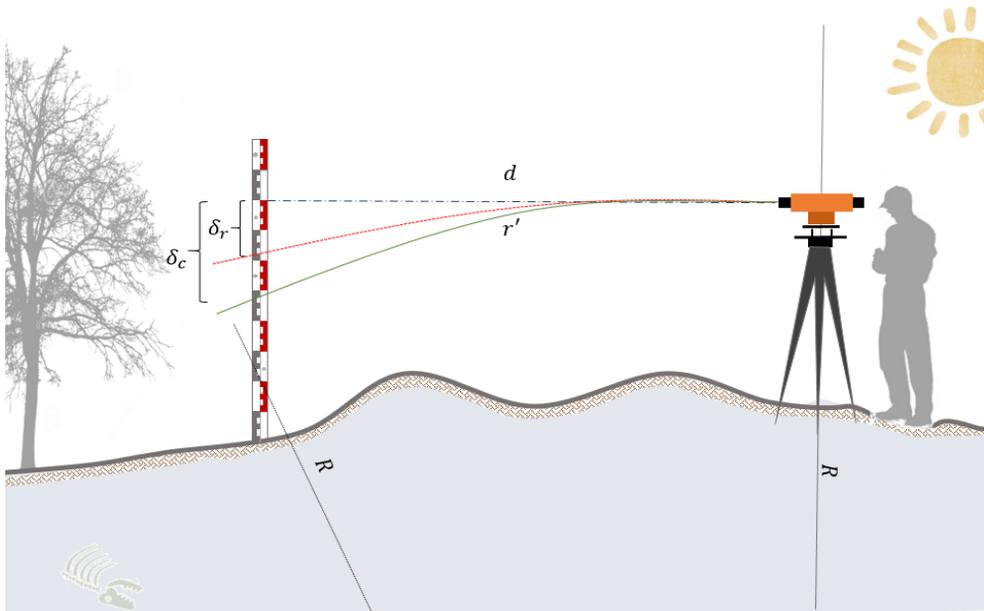


Figura 27. Curvatura y refracción²⁸

$$\delta_c = \frac{d^2}{2 \cdot r'} \quad (15)$$

²⁸ Fuente: los autores

El efecto de refracción depende de la presión atmosférica, temperatura y ubicación geográfica, pero se puede admitir, para simplificar el problema, como función directa de la curvatura terrestre (Casanova Matera, 2002).

$$\delta_r = k \cdot \delta_c \quad (16)$$

$$\delta_r = k \cdot \frac{d^2}{2 \cdot r'} \quad (17)$$

donde, k representa el coeficiente de refracción

El efecto de refracción contrarresta el efecto de curvatura, por lo que el efecto total de curvatura y refracción δ_{cr} se determina así:

$$\delta_{cr} = \delta_c - \delta_r = \frac{d^2}{2 \cdot r'} \cdot (1 - k) \quad (18)$$

la solución a este problema se da cuando se estaciona el instrumento exactamente en medio de los dos puntos que se involucran el desnivel, por tanto, los efectos de curvatura y refracción se anulan con las diferencias de visual adelante y atrás.

5.1.2 Colimación

Es el error α causado por la pérdida de perpendicularidad entre la línea que define el eje de la cruz filar y el centro óptico de la lente objetivo del instrumento. Es la mayor fuente potencial de errores sistemáticos en nivelación con longitudes de visuales desequilibradas.

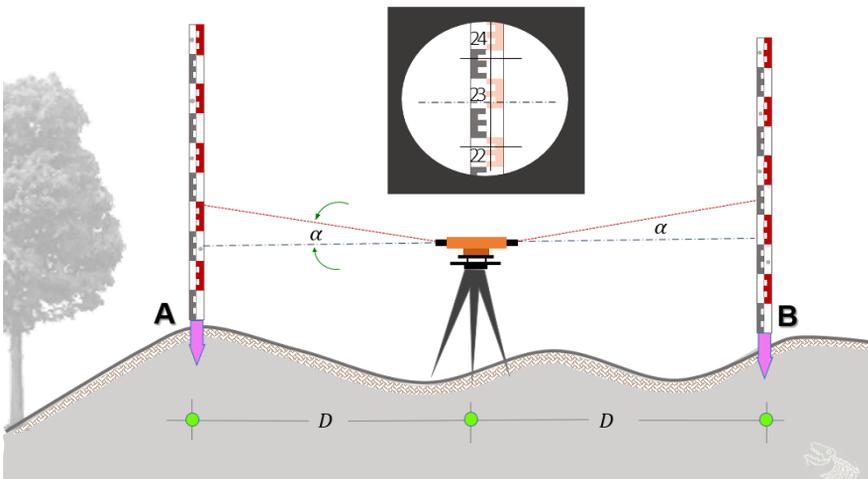


Figura 28. Colimación²⁹

²⁹ Fuente: los autores

Al igual que en el caso anterior, la solución a este problema se corrige estacionando el nivel a distancias iguales D , anulando su efecto con las diferencias de visual adelante y atrás.

5.1.3 Inclinación de la mira vertical

Se trata del error que se produce en la lectura de la mira debido al ángulo de desviación de su proyección vertical.

El efecto de este error depende del ángulo de inclinación α y la lectura de la mira l_i , entre más alto el valor de la lectura mayor es el error. De acuerdo con (Farjas Abadía, 2012) la inclinación de la mira se contabiliza de manera experimental en 1^g utilizando nivel esférico de mano y 3^g sin nivel o con uno descorregido.

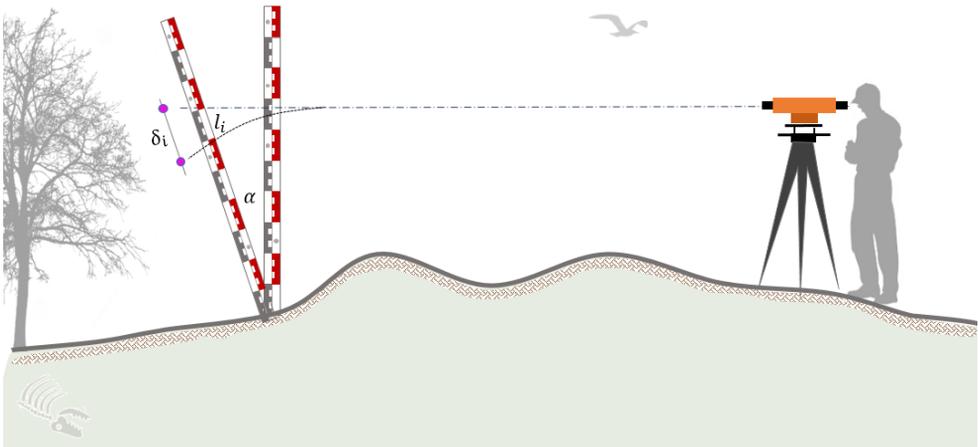


Figura 29. Inclinación de la mira vertical³⁰

5.1.4 Asentamiento del trípode

Se produce por no fijar el instrumento en forma adecuada. En el intermedio de lecturas atrás y adelante se puede producir un asentamiento del trípode, obteniendo lecturas con diferentes posiciones del instrumento, para corregir este error, las lecturas deben hacerse a una velocidad de observación constante y calcular el valor medio de las diferencias de alturas.

³⁰ Fuente: los autores

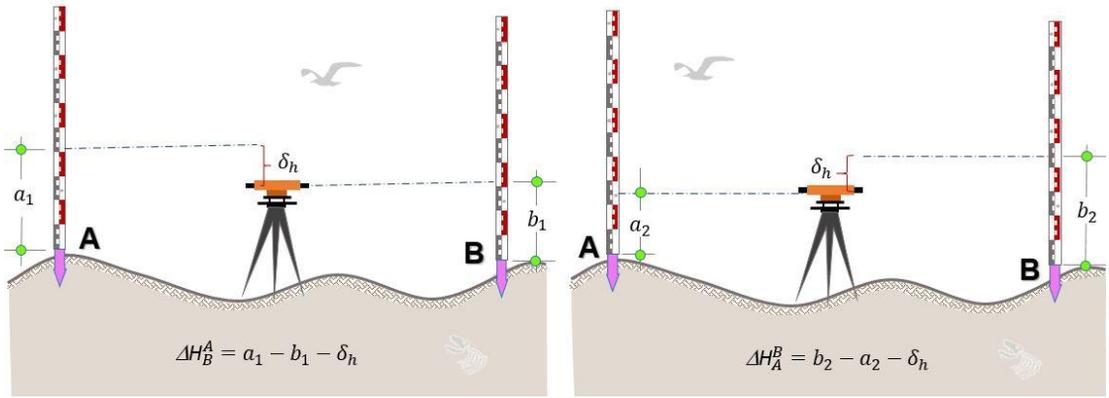


Figura 30. Asentamiento del trípode³¹

El cálculo del valor medio de ΔH_B^A y ΔH_A^B está dado por:

$$\overline{\Delta H_B^A} = \frac{\Delta H_B^A - \Delta H_A^B}{2} = \frac{a_1 - b_1 - \delta h - (b_2 - a_2 - \delta h)}{2} = \frac{a_1 - b_1 - (b_2 - a_2)}{2} = \frac{\Delta H_B^A - \Delta H_A^B}{2} \quad (19)$$

5.1.5 Error de índice de la mira

Sucede cuando se hace una lectura l y el tope de la mira no coincide con la unidad cero de la graduación.



Figura 31. Mira³²

El efecto del error de índice en la lectura será igual a:

$$l = (l) + \delta \quad (20)$$

Analizando, el efecto del error de índice de la mira en un solo desnivel se tiene:

$$\Delta H_B^A = l_{at} - l_{ad} \quad (21)$$

$$\Delta H_B^A = [(l_{at}) + \delta_1] - [(l_{ad}) + \delta_2] = l_{at} - l_{ad} + \delta_1 - \delta_2 \quad (22)$$

³¹ Fuente: los autores

³² Fuente: los autores

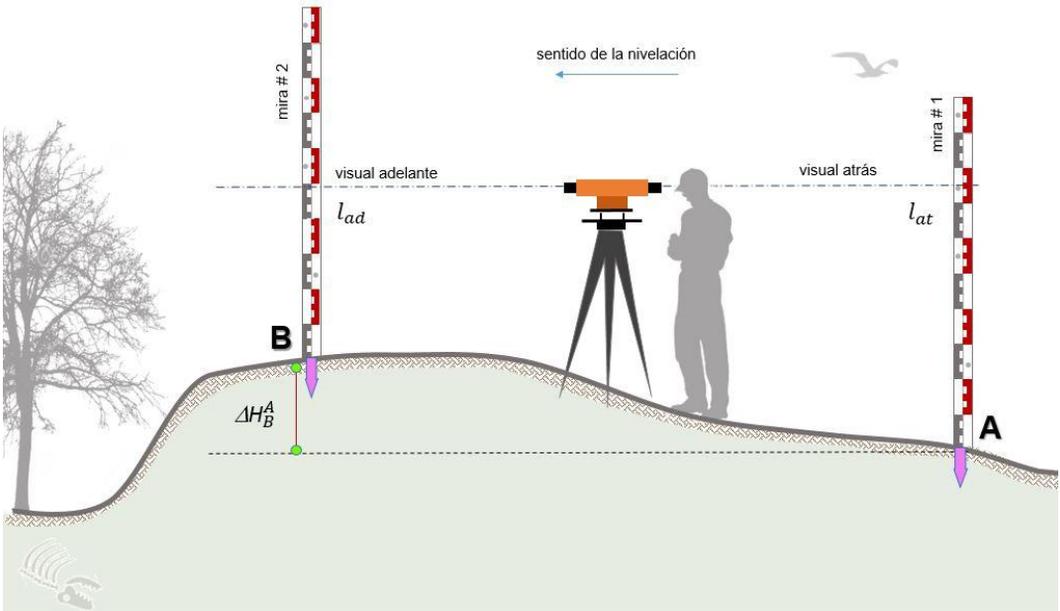


Figura 32. Error de índice de la mira³³

Por tanto, al usar una sola mira el error de índice se cancela porque $\delta_1 = \delta_2$, pero, ¿qué sucede cuando se usan dos miras para hacer la nivelación?

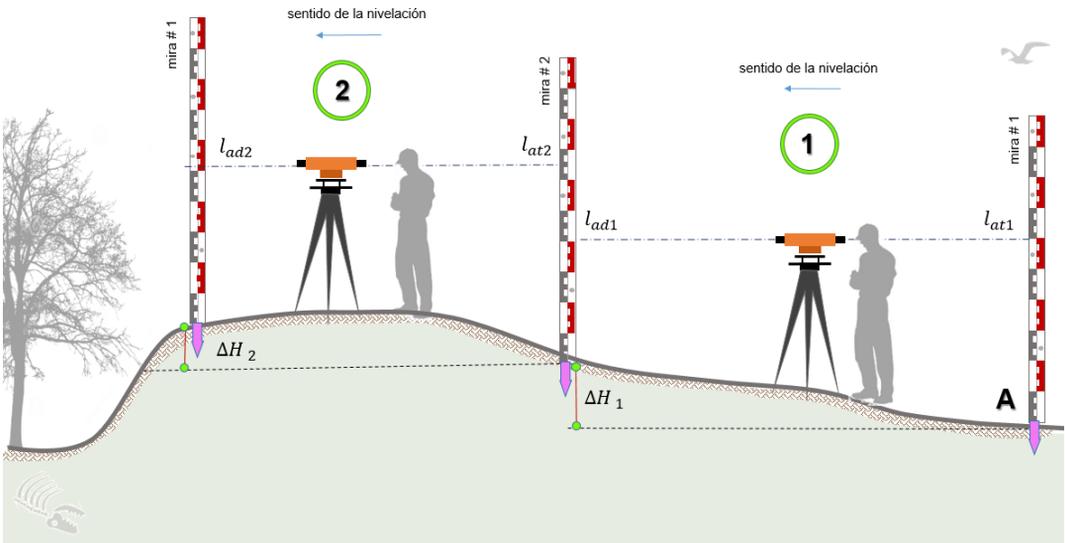


Figura 33. Error de índice de la mira³⁴

La sumatoria de las dos diferencias de alturas será:

$$\Delta H_1 = [(l_{at1}) + \delta_1] - [(l_{ad1}) + \delta_2] = l_{at1} - l_{ad1} + \delta_1 - \delta_2 \quad (23)$$

³³ Fuente: los autores

³⁴ Fuente: los autores

$$\Delta H_2 = [(l_{at2}) + \delta_2] - [(l_{ad2}) + \delta_1] = l_{at2} - l_{ad2} + \delta_2 - \delta_1 \quad (24)$$

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 = \sum(l_{at}) - \sum(l_{ad}) \quad (25)$$

Cuando se usan dos miras y se hace más de una estación del nivel, el efecto del error de índice también se cancela.

5.2 Diseño

En la realización de estudios topográficos, el diseño forma parte integral del proyecto. Es importante definir la calidad de los trabajos en general y en nuestro caso el diseño de nivelaciones, lo que permite optimizar el tiempo y los equipos a emplear que redundan en los costos del estudio.

El diseño de estos procesos depende de las características técnicas del instrumental de nivelación, aumento del telescopio, el error de lectura en la mira, el error de centrado de la burbuja (en los niveles con compensador del error del sistema automático), de la distancia de la visual, el medio ambiente y el topógrafo. (Jiménez Cleves, Vila Ortega, & Hurtado Bedoya, 1995)

5.2.1 Límite de utilización de la mira

En función de los aumentos (A) y de la lectura de la mira al milímetro se puede determinar la siguiente fórmula que calcula la distancia (D) a la cual se realizan las lecturas respectivas.

Si se desea que el error máximo no rebase 1 mm el límite de la distancia es:

$$D_{max} = \frac{6 \cdot A}{2,5} \quad (26)$$

5.2.2 Error centrado de la burbuja

Es aquel causado por la imprecisión de la burbuja de aire al colocarlo en su centro, además debido a la poca sensibilidad de la misma. En ciertos catálogos viene expresado en grados minutos y segundos, o en milímetros.

$$E_{BU} = \frac{0,1 \cdot \tau \cdot D_{max}}{\rho} \quad (27)$$

E_{BU} : error de centrado de la burbuja.

τ : mínima división de la burbuja.

D_{max} : distancia horizontal, entre el equipo y la mira.

ρ es 206265 = un segundo en radianes.

5.2.3 Error de lectura debido a la resolución del telescopio

Es la capacidad de distinguir dos objetos a determinada distancia.

$$E_r = \frac{60''}{A \cdot \rho} \cdot D_{max} \quad (28)$$

Donde,

E_r : error de lectura debido a la resolución del telescopio.

D_{max} : es la distancia entre el instrumento y la mira.

A : número de aumentos

ρ : un segundo en radianes.

5.2.4 Error de observación de la mira

Es el error de la toma de la lectura a una distancia dada y que depende de la mínima división del patrón graduado y el poder de resolución de instrumento

$$E_{OM} = \left(0,156 \cdot \frac{D_{max}}{A} + 0,040 \cdot t \right) \quad (29)$$

E_{OM} : error de observación de la mira

t : mínima división de la mira

D_{max} : distancia entre el instrumento y la mira

A : número de aumentos del instrumento

5.2.5 Error en la mínima división de la mira

Es la mitad del error garantizado por el fabricante en la colocación de la mínima división de la escala graduada. Vienen dada por la fábrica para miras con graduación de lectura directa al cm.

$$E_M = 1 \text{ mm} \quad (30)$$

E_M : error en la mínima división de la mira

5.2.6 Errores del medio externo

Agrupar los errores inherentes a las condiciones ambientales donde se realizan la medición. Se considera que este valor no excede el 25% del error total para nivelaciones de precisión media, el estudio de estos errores se trata en libros de más específicos por sus características especiales. Además, porque la finalidad de esta obra es el empleo de los errores en el diseño de la metodología y las especificaciones, mas no la explicación de estos.

5.2.7 Principales fuentes de error en la nivelación geométrica

La principal influencia en la precisión es debida a los errores del instrumento, del operador y a los errores del medio externo. Como es sabido en la nivelación geométrica el desnivel h es igual a la diferencia entre los valores de las lecturas de las miras atrás y adelante:

$$h = a - b \quad (31)$$

Si E_a y E_b son los errores medios cuadráticos en las observaciones totales a las miras, entonces el error del desnivel será:

$$E_h = \sqrt{E_a^2 + E_b^2} \quad (32)$$

Partiendo de que las mediciones son homogéneas entonces $E_a = E_b = E_h$, por consiguiente:

$$E_h = E_{OT} \cdot \sqrt{2} \quad (33)$$

E_{OT} : error de observación total

Partiendo del supuesto de que las mediciones se comportan bajo el criterio de igual valor de certeza (homogéneas), entonces se puede afirmar que el error total en la observación es igual a:

$$E_{OT} = \sqrt{E_{BU}^2 + E_r^2 + E_{OM}^2 + E_M^2} \quad (34)$$

Donde E_{BU} : error de centrado de la burbuja

E_{OT} : error de observación total

E_{OM} : error de observación de la mira

E_r : error de resolución del telescopio

E_M : error de la mínima división de la mira

Con base en esto se puede diseñar las especificaciones de la medición y clasificarla según su orden.

$$E_{Km} = E_h \cdot \sqrt{n} \quad (35)$$

E_{Km} : error por cada kilómetro nivelado.

E_h : error del desnivel

n : número de estaciones

Resumiendo, para hallar el error de cierre en una línea de nivelación se debe tener en cuenta que desde el punto de vista estadístico se trabajará con un coeficiente igual a tres (3), cuya esperanza matemática equivale 0.99996 y que garantiza alta precisión con un mínimo de datos, por tanto,

$$EC_{Max} = 3 \cdot E_{Km} \cdot \sqrt{L} \quad (36)$$

Donde: EC_{max} : tolerancia permitida en la medición

E_{Km} : error de la nivelación por kilómetro

L : distancia nivelada en kilómetros

5.2.8 Diseño nivelación geométrica

Ya se han descrito las principales fuentes de error en la nivelación geométrica para obtener una precisión media que es la utilizada en los trabajos de topografía convencional. Algunos de estos elementos se emplean para el diseño de especificaciones en otros procedimientos topográficos.

El fundamento del algoritmo de procedimiento es establecer la función del proceso que se está realizando $Ej: h = a - b$

Luego de enunciar la ley estadística o condiciones bajo las cuales se considera está sujeto el proceso de medición, es decir, bajo qué modelo se comporta el proceso de obtención del dato (homogéneo o heterogéneo). Se definen los errores que están comprometidos en todo el proceso de obtención resultado.

Finalmente se calcula el error total que es la suma de todos los errores particulares para establecer el mínimo rango dentro del cual los procesos deben arrojar los resultados para poder contrastar el grado de precisión obtenido en el diseño y el obtenido en la medición. Pudiendo concluir así el tipo de metodología y equipo a emplear aminorando el empleo de recursos humanos y técnicos.

Ejemplo

Dado las características técnicas del siguiente nivel de precisión, diseñar las especificaciones para realizar una nivelación de 1 Km.

Spectra A132A

Aumentos 32 x

Error medio de una nivelación doble de 1km ± 1 mm

Rango del compensador $\pm 10'$. Exactitud de calado: 0,5''

a. Distancia máxima

$$D_{max} = \frac{6 \cdot 32}{2,5} = 76,8 \text{ m}$$

b. Error de la burbuja

$$E_{BU} = \frac{0,5 \cdot 76800}{206265} = 0,19 \text{ mm}$$

c. Error de resolución del telescopio

$$E_r = \frac{60''}{32 \cdot 206265} \cdot 76800 = 0,70 \text{ mm}$$

d. Error en la mínima división de la mira

$$E_m = 0,5 \text{ mm}$$

e. Error de observación de la mira

$$E_{OM} = \left(0,156 \cdot \frac{76,80}{32} + 0,04 \cdot 1 \right) = 0,41 \text{ mm}$$

f. Error de observación total

$$E_{OT} = \sqrt{0,19^2 + 0,41^2 + 0,70^2 + 0,5^2}$$

$$E_{OT} = \pm 1 \text{ mm}$$

$$E_h = 1 \cdot \sqrt{2} = 1,41 \text{ mm}$$

g. Número de estaciones del nivel

$$N = \frac{1000}{2 \cdot 76,8} = 6,5 \cong 7$$

h. Error por kilómetro

$$E_{km} = 1,41 \cdot \sqrt{7} = 3,02 \text{ mm}$$

i. Tolerancia, se toma 2,5 corresponde al 99%, de la relación entre el error y el porcentaje de área bajo la curva de probabilidad.

$$T_G = 2,5 \cdot 3,02 = 7,05 \text{ mm}$$

j. Tolerancia general (2,5 medio externo)

$$E_c = 7,05 \cdot 1,025 \cdot \sqrt{L_{Km}} \cong 8 \text{ mm}$$

5.2.9 Diseño con placa plano paralela

El micrómetro de placa plano-paralela es un aditamento práctico y de fácil manejo para el aumento considerable de precisión. Sencillamente se enchufa sobre el anteojo del instrumento, se coloca la cruz del retículo sobre un centímetro entero y se leen los centímetros en la mira, los milímetros, según el modelo, se puede leer centésimos en el micrómetro de la placa plano paralela.

Error de horizontalidad

Es el error ocasionado, cuando el instrumento no queda geoméricamente vertical al eje horizontal, este se trasmite casi íntegramente a las visuales.

$$E_h = \frac{1}{20} \cdot S'' \quad (37)$$

S: Sensibilidad en segundos

Error de puntería

Es el ángulo formado por la dirección vertical de la mira mira y el hilo vertical del retículo.

$$E_p = \frac{10}{A} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot A}{100}\right) \quad (38)$$

Donde A es el número de aumentos del telescopio.

Ejemplo:

Dado el siguiente nivel de precisión diseñar las especificaciones para realizar una nivelación de 1 Km., con una distancia máxima de 40 m.

TS – E1 TOPCON

Aumentos: 42x

1 Km. de doble nivelación $\pm 0,2$ mm

Sensibilidad del nivel 10''

a. Error de horizontalidad

$$E_h = \frac{1}{20} \cdot 10 = 0,5''$$

b. Error de puntería

$$E_p = \frac{10}{42} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 42}{100}\right) = 0,64''$$

c. Error total

$$E_T = \sqrt{0,5''^2 + 0,81''^2} = 0,95''$$

d. Conversión del error total

$$E_T = \frac{0,95''}{206265} \cdot 40000 = 0,02 \text{ mm}$$

e. Número de estaciones

$$N = \frac{1000}{40} = 25$$

f. Tolerancia

$$E_{Km} = 0,02 \cdot \sqrt{25} = 0,1 \text{ mm}$$

5.3 Estándares mínimos de cierre para de control vertical

Orden de clasificación	Estándar de cierre de elevación (mm)
Primer orden, clase I	$3 \cdot \sqrt{K}$
Primer orden, clase II	$4 \cdot \sqrt{K}$
Segundo orden, clase I	$6 \cdot \sqrt{K}$
Segundo orden, clase II	$8 \cdot \sqrt{K}$
Tercer orden	$12 \cdot \sqrt{K}$
Diseño de construcción	$24 \cdot \sqrt{K}$

Tabla 3. Estándares para cierre para control vertical

\sqrt{K} : Raíz cuadrada de la distancia en kilómetros (Committee, Federal Geodetic Control, 1990)

Ejercicios propuestos

1. Establecer cuál es el error de resolución, para los niveles, con los siguientes aumentos: 18x, 21x, 25x, todos con distancia de 80 m.
2. Seleccione un instrumento de nivelación que permita obtener un error de cierre menor o igual a seis centímetros, para un itinerario cuyo perímetro es igual a 4318 m.

6. CÁLCULO Y AJUSTE DE REDES DE NIVELACIÓN

Como se sabe, siempre que se mide una cantidad física se cometen errores inevitables. El caso de la medición de desniveles no es de ninguna manera una excepción, por lo que al momento de expresar sus resultados se deberá tomar en cuenta la ocurrencia de dichos errores.

Aparentemente el cálculo de una nivelación es un conjunto sencillo de operaciones aritméticas básicas, que finalmente pueden dar desniveles entre puntos determinados; así, de la figura 34 se tiene que ΔH_B^A no es más que el desnivel “observado” entre los puntos *A* y *B*, pero, como en todo trabajo topográfico este valor deberá ser verificado y compensado de acuerdo a las condiciones a cumplir.

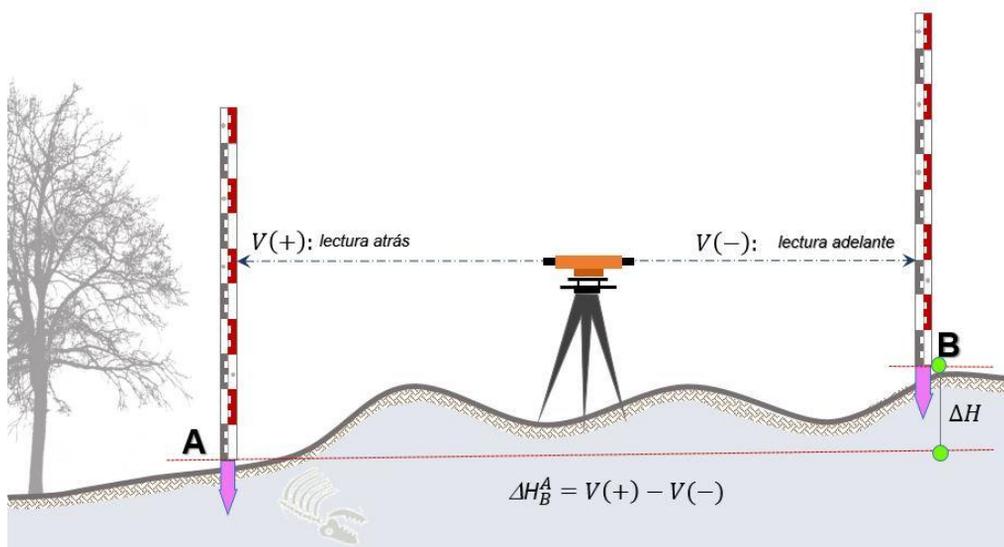


Figura 34. Nivelación³⁵

En todo caso, el cálculo del desnivel entre dos BMs será simplemente la diferencia entre la suma de visuales hechas hacia atrás, con las visuales hechas adelante, según se ha establecido en capítulos anteriores. Así pues, la diferencia entre dos BMs extremos, será la suma algebraica de los desniveles entre los BMs intermedios. Hasta este punto a los desniveles entre los BMs, se les considera como “observados”, aun cuando estos sean resultado ya de un proceso previo. Estos desniveles tendrán que ser ajustados, según se dijo anteriormente, de acuerdo a ciertos parámetros.

³⁵ Fuente: los autores

6.4 Cálculo y ajuste de una nivelación lineal

Se le llama línea de nivelación, a aquella que tiene un desarrollo abierto, ya sea ligado o no en sus extremos con BMs pre-establecidos. Pueden presentarse tres casos:

6.4.1 Nivelación sin control

Se utiliza cuando solo interesa conocer el desnivel entre dos puntos y no su elevación. En este caso el único ajuste que procede, si es que se realizan observaciones redundantes, es calcular el valor más probable de cada una de ellas y con estas obtener el desnivel.

6.4.2 Nivelación con control en uno de los extremos

En cuanto a su tratamiento es similar al anterior, solo que en este caso es conocido el valor de alguno de sus BMs extremos, entonces será posible conocer la elevación de todos los BMs adicionales.

6.4.3 Nivelación con control en dos extremos

En este caso, además de conocer los desniveles observados entre BMs, se conocen las elevaciones de los extremos, lo que permite establecer mayor cantidad de parámetros para que sea posible un ajuste.

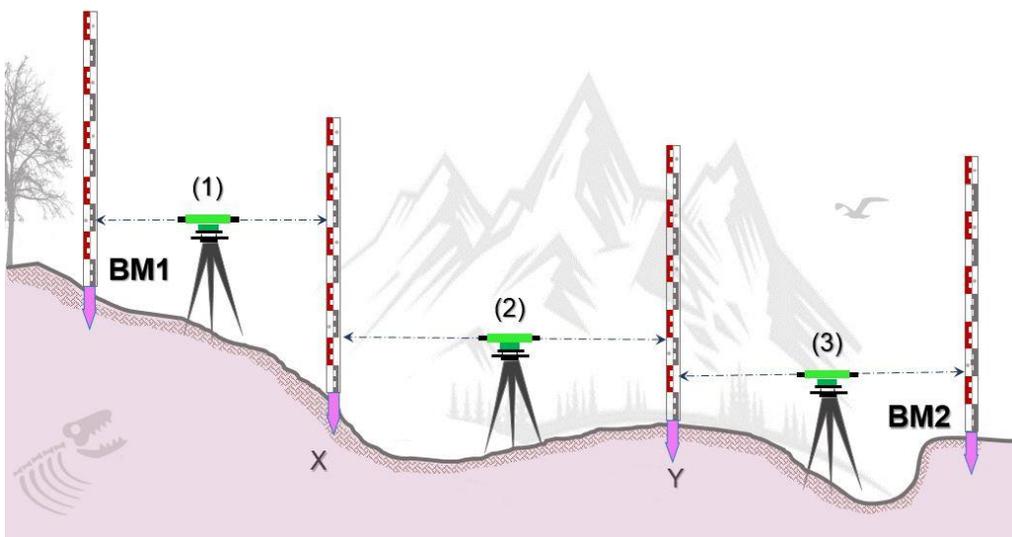


Figura 35. Nivelación con control en dos extremos³⁶

³⁶ Fuente: los autores

H_i : elevación inicial del BM1

H_f : elevación final del BM2

H'_f : elevación final del BM2 descorregida

e_c : error de cierre

ΔH_i : desniveles entre los puntos nivelados.

$$H'_f = H_i + \sum_j \Delta H_i \quad (39)$$

Error de la línea o itinerario

$$e_c = H'_f - H_f \quad (40)$$

$$e_c = H_i + \sum_j \Delta H_j^i - H_f \quad (41)$$

Compensación clásica

Es la distribución simple de los errores para los desniveles, viene dado por:

$$\Delta H_j = \Delta H'_j - \frac{e_c}{n} \quad (42)$$

$$H_i = H'_j - \frac{j}{n} \cdot e_c \quad (43)$$

Donde, n es el número de desniveles.

H_i : cota inicial del BM1

e_c : error de cierre

ΔH_i : desniveles entre los puntos nivelados.

H_j : elevación del punto j

ΔH_j : desniveles compensado

j : punto a dar elevación

D : distancia entre los puntos nivelados

Compensación en función de las distancias horizontales

Errores de los desniveles

$$e_j = - \frac{D_j^2}{\sum_k \cdot D_k^2} \cdot e_c \quad (44)$$

Desnivel compensado

$$\Delta H_j = \Delta H'_j - \frac{D_j^2}{\sum_{k=1}^n \cdot D_k^2} \cdot e_c \quad (45)$$

Cotas compensadas

$$H_j = H_i + \sum_{k=1}^j \Delta H'_k - \frac{\sum_{k=1}^j \cdot D_k^2}{\sum_{k=1}^n \cdot D_k^2} \cdot e_c \quad (46)$$

Ejemplo:

Ajustar la siguiente nivelación, a partir de los siguientes datos de campo.
elev BM_1 : 207,825 m, *elev* BM_2 : 201,371 m

Lado	Desnivel (ΔH)	Distancia
$BM_1 - E_1$	-2,173	102,5
$E_1 - E_2$	-2,429	188,9
$E_2 - E_3$	0,785	93,2
$E_3 - E_4$	-1,647	41,6
$E_4 - BM_2$	-0,975	215,0

Solución:

Se realizará el cálculo por los dos métodos expuestos anteriormente.

Se calcula la cota final descorregida del BM_2 , utilización la ecuación (39) se obtiene:

$$H'_f = 207,825 - 6,439$$

$$H'_f = 201,386$$

Error de la línea o itinerario:

$$e_c = H'_f - H_f$$

$$e_c = 201,386 - 201,371$$

$$e_c = 0,015$$

Compensación clásica, desniveles corregidos

$$\Delta H_j = \Delta H'_j - \frac{e_c}{n}$$

$$\Delta H_1 = -2,173 - \frac{0,015}{5} = -2,176$$

$$\Delta H_2 = -2,429 - \frac{0,015}{5} = -2,432$$

$$\Delta H_3 = -0,785 - \frac{0,015}{5} = +0,782$$

$$\Delta H_4 = -1,647 - \frac{0,015}{5} = +1,650$$

$$\Delta H_5 = -0,975 - \frac{0,015}{5} = -0,978$$

Comprobación

Se calcula la cota final descorregida del BM_2 , la que debe ser igual a la cota original de BM_2 .

$$H'_f = H_i + \sum_j \Delta H_i$$

$$H'_f = 207,825 - 6,454$$

$$H'_f = 201,371$$

Para hacer la compensación en función de las distancias horizontales se calculan los desniveles compensados, usando la ecuación (44)

Lado	Distancia	Distancia ²	Desnivel	Desnivel corregido	Elevación compensada
BM ₁ - E ₁		10506,25	-2,173	-2,175	205,650
E ₁ - E ₂	188,9	35638,21	-2,429	-2,434	203,216
E ₂ - E ₃	93,2	8686,24	0,785	0,784	204,000
E ₃ - E ₄	41,6	1730,56	-1,647	-1,647	202,353
E ₄ - BM ₂	215	46225	-0,975	-0,982	201,371
$\sum_{k=1}^n D_k^2 =$		102831,26		-6,454	

Comprobación

elevación del BM₂ : elevación del BM₂

Compensada

201,371 : 201,371 cumple

6.5 Cálculo y ajuste de circuitos

Se entiende por “circuito”, a la conformación de líneas de nivelación que inicia y termina en un mismo BM. Figura 36

Así, teóricamente la suma algebraica de los desniveles deberá ser igual a cero, pero debido a los errores, normalmente accidentales en esta etapa del cálculo, esto nunca ocurre. Se deduce entonces que es necesario ajustar los valores observados para cumplir la condición establecida, lo que evidentemente repercutirá en el valor *a priori* calculado para los BMs que conforman el circuito.

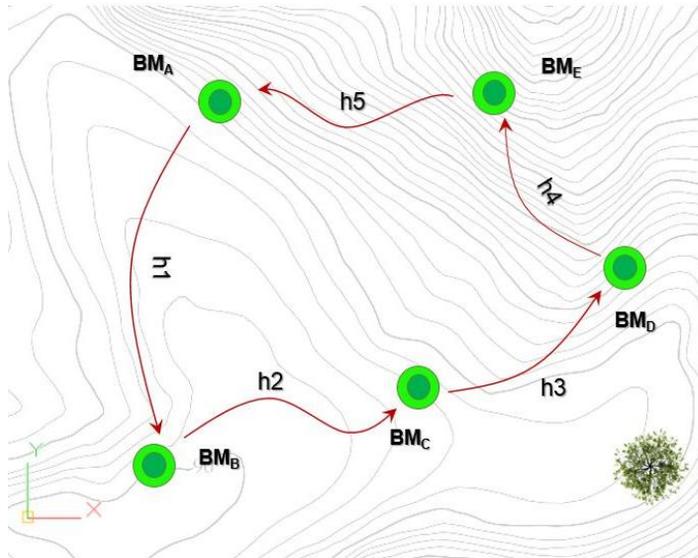


Figura 36. Circuito de nivelación³⁷

Error de cierre

$$e_c = \sum_{j=1}^n H'_j \quad (47)$$

Correcciones

$$C_j = -\frac{D_j}{\sum_{j=1}^n D_j} \cdot e_c \quad (48)$$

Desnivel corregido

$$H_j = H'_j + C_j \quad (49)$$

Ejemplo:

Calcular las cotas compensadas del siguiente circuito de nivelación

Cota de n_1 : 278,280

³⁷ Fuente: los autores

Solución:

Itinerario	Desnivel	Distancia	Corrección	Desnivel corrección
n_1-n_2	-1,371	3,7	0,002	-1,369
n_2-n_3	2,431	4,2	0,003	2,434
n_3-n_4	-1,628	3,5	0,001	-1,627
n_4-n_5	0,030	3,3	0,001	0,031
n_5-n_1	0,529	3,6	0,002	0,531
$e_c =$	-0,009	14,6	0,009	0,000

← Comprobación →

El mismo valor pero con signo contrario

Cotas compensadas

Itinerario	Desnivel corrección	Elevación compensada
n_1-n_2	-1,369	276,911
n_2-n_3	2,434	279,345
n_3-n_4	-1,627	277,718
n_4-n_5	0,031	277,749
n_5-n_1	0,531	278,280

La cota final igual a la cota inicial dada del punto n_1

6.6 Cálculo y ajuste de redes

Se entiende por “red de nivelación” a sistema de líneas de nivelación vinculadas entre sí, que conforman un conjunto de polígonos o mallas extendidas sobre la superficie del estudio, constituyendo una estructura homogénea de puntos fijos altimétricos. Es el caso más avanzado que un proyecto de nivelación y más complejo de calcular, dado que se tienen diferentes rutas alternativas para calcular el valor de los BMs determinados.

6.6.1 Método de aproximaciones sucesivas

Consiste en corregir cada polígono de la red con los valores corregidos para cada itinerario cerrado, empleados en la corrección de los itinerarios colindantes; se repite la operación para tantos itinerarios como sean necesarios para compensar los valores de las cotas de toda la red. Dentro de cada polígono, el error de cierre se distribuye entre los lados del mismo, proporcionalmente con su longitud.

Es aconsejable empezar por el polígono que tenga el mayor error de cierre y partir de este en sentido horario o contra horario.

Para hacer más rápido el cálculo utilizando la ecuación 47, se reemplaza por el porcentaje de la línea nivelada en función del circuito de la siguiente forma:

$$C_j = D\% \cdot e_c \quad (50)$$

Ejemplo:

Ajustar la siguiente red de nivelación

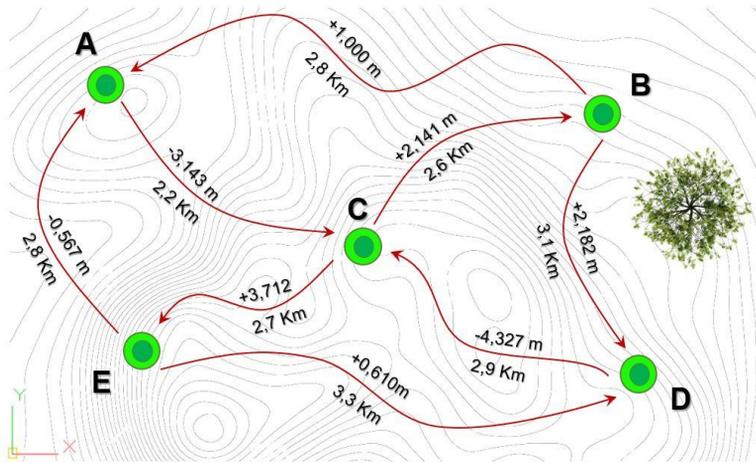


Figura 37. Red de nivelación³⁸

Solución:

Se determina el error de cada uno de los circuitos:

Lado	Δ	Lado	Δ	Lado	Δ	Lado	Δ
AB	1,000	BD	2,182	CD	-4,327	CE	3,712
BC	2,141	DC	-4,327	DE	0,610	EA	-0,567
CA	-3,143	CB	2,141	DC	3,712	AC	-3,143
	-0,002		-0,004		-0,005		0,002

Como se puede apreciar, el circuito de mayor error es CDEC.

³⁸ Fuente: los autores

Itinerario cerrado	Lado	Distancia		Ciclo I			Ciclo II			Ciclo III		
		Km	%	Desnivel	Corrección	Des. Corr	Desnivel	Corrección	Des. Corr	Desnivel	Corrección	Des. Corr
CDEC	CD	2,9	33	-4,327	0,001	-	-4,325	0	-4,325	-4,325		
	DE	3,3	37	0,610	0,002	0,612	0,612	0,001	0,613	0,613		
	EC	2,7	30	3,712	0,002	3,714	3,712	0	3,712	3,712		
	Total	8,9	100	-0,005	0,005	0	-0,001	0,001	0	0		
CEAC	CE	2,7	35	3,714	-0,002	3,712	3,712	0	3,712	3,712		
	EA	2,8	36	-0,567	-0,001	0,568	-0,568	-0,001	-0,569	-0,569		
	AC	2,2	29	-3,143	-0,001	3,144	-3,143	0	-3,143	-3,143		
	Total	7,7	100	0,004	-0,004	0	0,001	-0,001	0	0		
ABCA	AB	2,8	37	1,000	0,001	1,001	1,001	0	1,001	1,001		
	BC	2,6	34	2,141	0,001	2,142	2,142	0	2,142	2,142		
	CA	2,2	29	-3,144	0,001	3,143	-3,143	0	-3,143	-3,143		
	Total	7,6	100	-0,003	0,003	0	0	0	0	0		
BDCB	BD	3,1	36	2,182	0,001	2,183	2,183	0	2,183	2,183		
	DC	2,9	34	-4,326	0,001	4,325	-4,325	0	-4,325	-4,325		
	CB	2,6	30	2,142	0,000	2,142	2,142	0	2,142	2,142		
	Total	8,6	100	-0,002	0,002	0	0	0	0	0		

Se calculan las cotas a partir de la cota del BM_A : 540,50

A:	540,400
AB:	-1,001
B:	539,399
BD:	2,183
D:	541,582
DE:	-0,613
E:	540,969
EA:	-0,569
A:	540,400
AC:	-3,143
C:	537,257

Ejercicios propuestos

1. Calcular la siguiente red de nivelación y ajustarla.

Punto	V+	A. i.	V-	Elevación	Punto	V+	A. i.	V-	Elevación
BM15	2,341	866,604		864,263	BM10	2,056	869,934		867,878
C#1	1,164	867,616	0,152	866,452	C#5	3,092	872,202	0,824	869,110
C#2	3,346	870,031	0,931	866,685	C#6	0,380	868,807	3,775	868,427
C#3	2,59	871,234	1,387	868,644	C#2	1,053	867,726	2,134	866,673
C#4	0,681	869,722	2,193	869,041	C#7	1,492	866,932	2,286	865,440
BM10			1,844	867,878	BM15			2,691	864,241
Nivelación					Contra Nivelación				

2. La siguiente son unos registros de una nivelación estadimétrica de una poligonal cerrada.

Est	Pto	Ángulo vertical		Dh	Hs	Hm	Hi	A.i.	Desnivel	Elevación
		Grados	Minutos							
Δ1								1,489		1224,632
	Δ2	- 01	04			1,444	1,320			
Δ2								1,500		
	Δ3	-01	16			1,470	1,362			
Δ3								1,495		
	Δ4	05	22			1,450	1,326			
Δ4								1,510		
	Δ5	-02	20			1,560	1,410			
Δ5								1,492		
	Δ1	00	38			1,570	1,503			

Con los datos anteriores usted debe:

- Calcular la información faltante en la tabla (dh – hs – desnivel - elevación)
- Calcular el error de cierre y decidir si cumple con los Estándares mínimos de cierre de elevación para control vertical, tenga en cuenta que la nivelación es de orden de una nivelación de diseño de construcción.
- Ajustar la nivelación si es posible.

7. NIVELACIÓN DE SUPERFICIES

Es una técnica topográfica que se utiliza para representar la forma tridimensional de un terreno, se determinan las tres coordenadas (x, y, z) de puntos que pueden estar ubicados regular o irregularmente y que define las formas más representativas de las superficies.

7.1 Por distancias fijas lo largo de un eje

- Se determina la elevación de puntos a intervalos regulares, puede ser cada 5 o 10 m, a lo largo de un eje, luego en cada punto, se trazan líneas perpendiculares y se va determinando la elevación de puntos sucesivamente sobre esa normal, a ambos lados, en sitios en donde su altura varíe entre 50 cm a 1 m según la conformación del terreno y en la longitud requerida.
- Se determina la elevación de puntos según distancias verticales fijas y se van localizando puntos de cota redonda a lo largo del eje, en cada punto se trazan normales y se procede como se mencionó anteriormente.

7.2 Cota por cambios de pendiente

El observador después de determinar su altura instrumental, se estacionan en el punto de cota conocida del eje, proyecta esta altura y con el *nivel abney* determina la pendiente, de acuerdo a la configuración del terreno, se mide la distancia que se alejó de la mira, se registra, y se traslada al lugar donde quedo la mira, y se procede de igual forma a buscar el siguiente punto. El procedimiento se sigue hasta llegar a la distancia que requiere cubrir a ambos lados del eje.

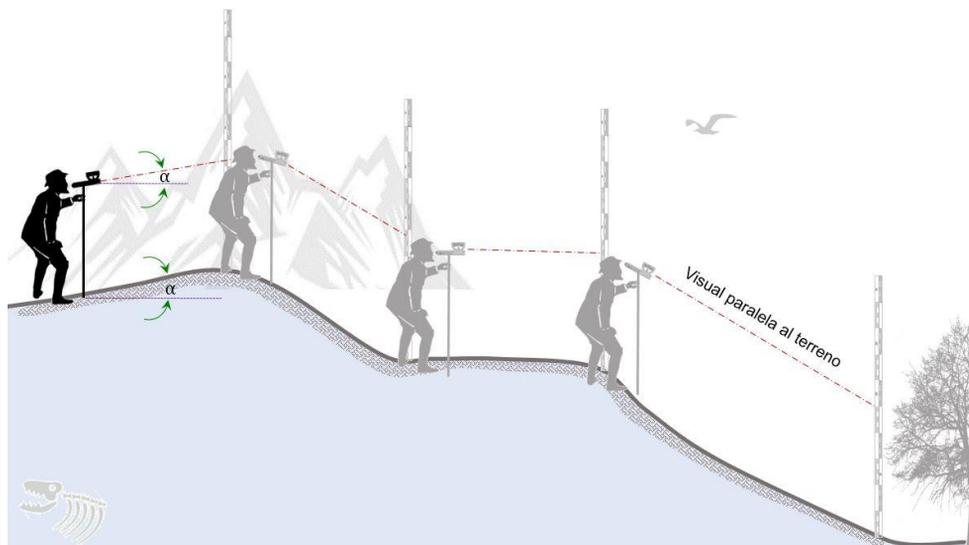


Figura 38. Cambios de pendiente³⁹

Modelo de cartera

Derecha					Eje	Izquierda					
	24,56	17,10	14,80	K0+030	5,15	2,30	15,36	8,25	15,23		
	+18%	+10%	+8%	503,24	-5%	-7%	-2%	0%	+2%		
	14,75	12,25	11,36	9,20	K0+020	10,1	20,14	22,30	18,23	16,35	19,35
	+22%	+17%	+10%	+13%	502,8	-6%	-8%	-3%	+1%	+4%	+12%
			10,85	10,25	K0+010	9,25	13,25	17,25	19,25		
			+20%	+15%	500,78	-7%	-8%	-1%	+2%		
			9,25	7,35	K0+000	14,25	15,23	17,00	15,23	19,25	
			+9%	+12%	500,25	-6%	-4%	-8%	-9%	-11%	

Nota: los dos métodos anteriores se usan principalmente para levantamientos longitudinales, en el diseño de vías y canales.

7.3 Nivelación por puntos de quiebre

³⁹ Fuente: los autores

Se realiza con un tránsito como la nivelación taquimétrica, o una estación total, colocando la mira o el prisma en los puntos representativos donde cambia la pendiente, también se puede realizar con un nivel de precisión (provisto de círculo horizontal) siguiendo el mismo criterio. Es importante que el topógrafo tenga nociones de geomorfología para la definición de los puntos.

Modelo de cartera

Est - Pv	Azimut	Hilos	LCV	DH	DE
1	142°58'20"	2,000	90°59'42"		
		2,157			
		2315			
2	157°50'03"	2,000	91°02'40"		
		2,139			
		2,278			
3	173°18'37"	1,700	90°43'55"		
		1,839			
		1,978			
4	185°16'52"	2,000	91°36'25"		
		2,095			
		2,190			
5	254°14'55"	2,000	88°12'38"		
		2,063			
		2,125			
6	193°55'50"	2,000	91°31'56"		
		2,147			
		2,295			
7	223°30'55"	2,000	92°14'30"		
		2,176			
		2,352			
8	247°59'52"	2,000	91°24'35"		
		2,114			
		2,228			
9	286°09'25"	1,700	91°16'40"		
		1,743			
		1,785			
10	142°44'10"	2,300	91°27'09"		
		2,474			
		2,648			
	Ai = 1,47				

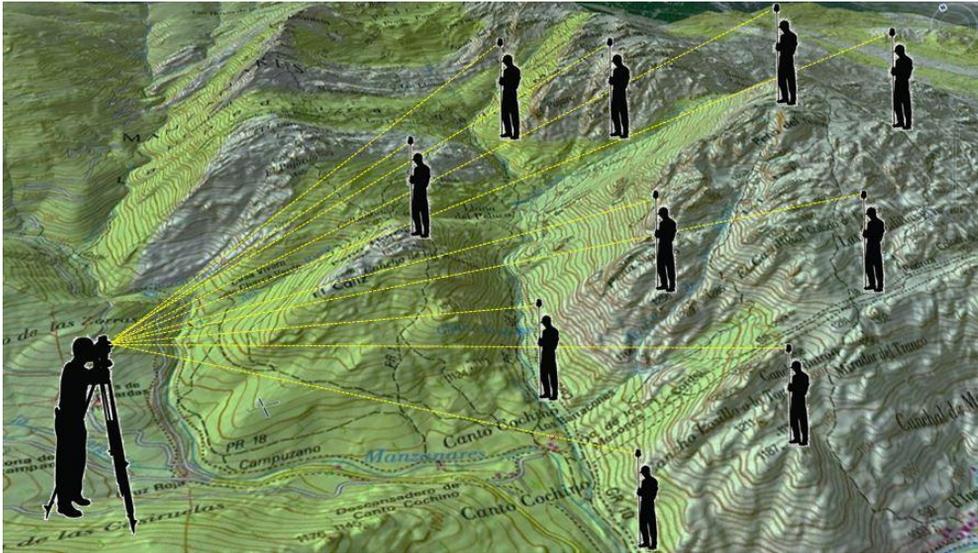


Figura 39. Nivelación por puntos de quiebre⁴⁰

Este procedimiento es conducente a obtener una cantidad de puntos con estructura N, E, Z . Descripción que se conoce como “nube de puntos” la definición de la superficie se hará interpolando dichos puntos, esto se tratará con mayor profundidad en el capítulo nueve.

Ejercicios propuestos

Calcular el desnivel y la cota de los puntos 1 al 8 del siguiente fragmento de una nivelación trigonométrica realizada por puntos destacados.

Est	Pto	Ang. Cen.	A.P. (o)	A.I. (i)	D.H.	Desn.	Elev.	Código
$\Delta 1$		o	'		1,602		1620,320	delta
	1	91	30	2,493		232,840		terreno
	2	95	17	1,921		75,554		terreno
	3	83	10	1,274		47,320		terreno
	4	90	30	1,406		195,985		terreno
	$\Delta 2$	85	32	1,704		67,389		delta
$\Delta 2$				0,000	1,513			delta
	$\Delta 1$			0,000				delta
	5	85	30	1,724		80,303		terreno
	6	105	23	2,250		139,444		terreno
	7	105	32	1,750		139,243		terreno
	$\Delta 3$	95	30	1,724		80,058		delta
$\Delta 3$				0,000	1,485			delta
	$\Delta 2$			0,000				delta
	8	91	39	2,589		291,581		terreno

⁴⁰ Fuente: los autores

8. REPRESENTACIÓN DEL RELIEVE

Un mapa topográfico es una representación bidimensional de una porción de la superficie terrestre a escala. Su característica esencial es la de representar las complejas formas de la superficie terrestre. Los planos topográficos tienen multitud de aplicaciones como: la localización de proyectos de ingeniería; en trabajos de campo para geógrafos, geólogos, agrónomos, topógrafos y para todas las personas interesadas en obtener datos sobre el relieve y las pendientes de una determinada zona. Debido a que la tierra representada por un elipsoide de revolución posee superficie no desplegable en un plano, no es posible proyectarla sin que se pierda alguna de sus propiedades geométricas como forma, distancia, dirección o área.

El primer plano topográfico es de lo que es actualmente territorio Iraquí, al sur de Bagdad, Mesopotamia, se levantan las ruinas de la ciudad sumeria de Nippur, centro genesiaco de la civilización universal. En 1899, arqueólogos de la Universidad de Pensilvania que trabajaban en el lugar, hallaron dentro de un jarrón de terracota, una variada colección de tablillas de arcilla, que integran actualmente la importante colección *Hermann Hilprecht* de tablillas sumerias. Sorprendentemente una de ellas, de 21 por 18 cm, tenía prolijamente dibujado el plano de la ciudad.

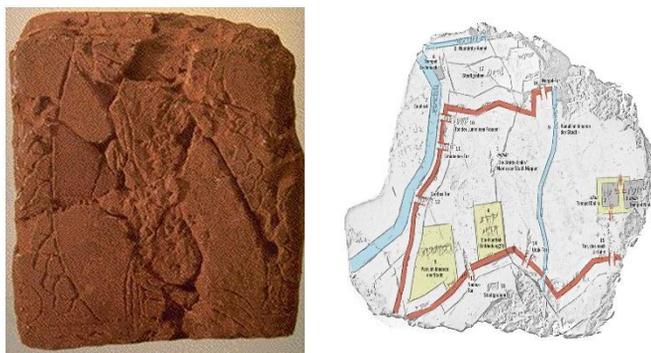


Figura 40. Primer plano topográfico⁴¹

El procedimiento elegido para representar el terreno debe reunir las siguientes condiciones:

1. Permitir encontrar la elevación, aunque sea aproximada, de un punto cualquiera del terreno representado en el plano.
2. Indicar las pendientes

⁴¹ Tomado de:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Antiker_Stadtplan_von_Nippur_mit_%C3%9Cbbersetzungen.jpg

3. Hacer resaltar las formas del terreno de la manera más expresiva posible.

El relieve del terreno puede representarse de varias formas:

8.1 Mapas en relieve

Es una representación del terreno en tres dimensiones con escala horizontal y vertical, en realidad constituyen una miniatura del terreno representado.

Los materiales empleados para su elaboración son plásticos, cartón, papel. Es indudable que el mapa en relieves es el más inteligible de todos los métodos representativos del terreno; pero su uso está muy limitado por sus elevados costos y por el gran volumen que ocupan.

8.2 Curvas de nivel

El holandés Cruquius fue quien en 1729, empleó por primera vez las curvas de nivel, para representar las formas del terreno, después, en 1737, el francés Buache utilizó también estas curvas con el mismo objeto.

Se llama curva de nivel a una línea imaginaria cuyos puntos están todos a la misma altura sobre un plano de referencia, pudiendo considerarse como la intersección de una superficie de nivel con el terreno. El concepto de línea de nivel puede entenderse fácilmente si se imagina una represa; si el agua está calmada, estará al mismo nivel en todos los puntos de la orilla determinando, así esta orilla una curva de nivel; si se hace descender el nivel de aguas en 1 metro, la nueva orilla determinará una segunda curva de nivel; y descensos sucesivos del agua resultarán en la formación de nuevas orillas y nuevas curvas de nivel.

La representación del terreno, con todas sus formas, accidentes, tanto en su posición en un plano horizontal como en sus alturas, se logra simultáneamente mediante las *curvas de nivel también llamadas isolíneas*. Estas curvas se utilizan para representar en planta y elevaciones al mismo tiempo, la forma o configuración del terreno, que también se llama relieve.



Figura 41. Curvas de nivel⁴²

8.2.1 Características de las curvas de nivel

- Todos los puntos sobre una curva de nivel tienen la misma elevación.
- Cada curva de nivel se cierra en si misma puede ser dentro o fuera de los límites del plano.
- Una curva de nivel que se cierra dentro de los límites de un mapa, indica, una elevación o una depresión. Cuando indica una depresión, esto se aclara con el símbolo.

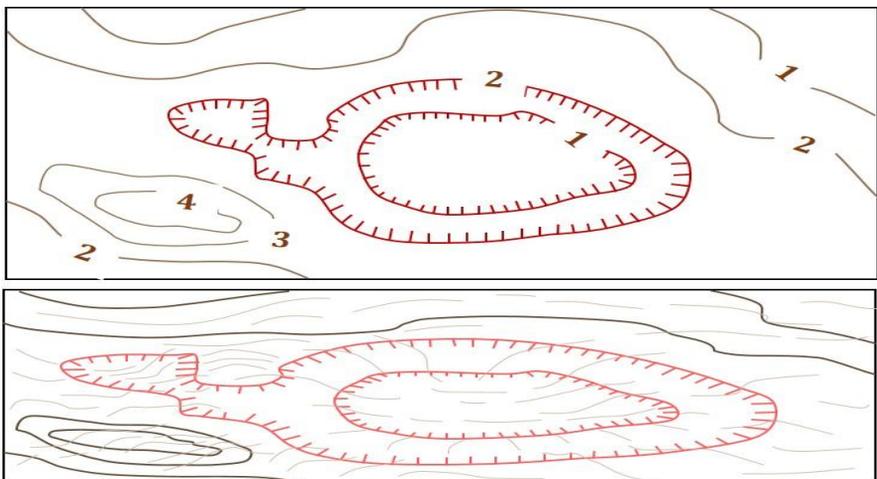


Figura 42. Curvas de nivel depresión⁴³.

- Las curvas de nivel nunca pueden cortarse entre sí, excepto donde existe un saliente en voladizo, y debe haber dos intersecciones (es un caso raro).

⁴² Fuente: los autores

⁴³ Fuente: los autores

- Sobre una pendiente uniforme, las curvas de nivel están igualmente espaciadas.
- Sobre una superficie plana, son rectas y paralelas entre sí.
- Donde las curvas de nivel están muy juntas, significa que el terreno es muy pendiente, si están muy separadas, indican que el terreno es plano o poco pendiente.
- La curva de nivel que pasa por cualquier punto, es perpendicular a la línea de máxima pendiente en ese punto.
- Dos curvas de nivel de la misma elevación no pueden unirse y continuar como una sola línea.
- Las curvas de nivel forman una U o V al cruzar una corriente, el vértice de la letra señala la dirección aguas arriba.

8.2.2 Clases

Según (IPGH, 1978), Los tipos de isolíneas utilizadas en la cartografía son diversos, y pueden variar en función de la entidad que genere la cartografía. La tipología la constituye:

- Maestra o índice: 1 de cada 5 curvas.
- Intermedias o básicas: las existentes entre las maestras.
- Intercaladas: curvas discontinuas o de puntos, que generalmente equivalen a la mitad del intervalo básico.
- De depresión: el área situada en el exterior de una curva de nivel cerrada, se considera como situada en una posición más elevada que la superficie situada en el interior.
- Superpuestas: en zonas de relieve pendiente, y dependiendo de la escala y la equidistancia de la cartografía, aparecen líneas únicas que representan varias curvas de nivel que coinciden en el espacio.
- Aproximadas: líneas discontinuas sin valor altitudinal preciso, que se utilizan para representas formas generales donde no es posible establecer curvas de nivel precisas.

8.2.3 Equidistancia

Es la separación vertical entre isolíneas. La selección adecuada de la equidistancia para un plano topográfico se base en: la precisión deseada en las elevaciones que se leen sobre él, los rasgos característicos del terreno, su legibilidad y costo.

8.2.4 Ventajas de las curvas de nivel o isolíneas

Las principales ventajas de las isolíneas se basan en que no son simplemente muestras aleatorias de elevación de una superficie, sino, que dan lugar a un modelo que contiene bastante más información que la sola elevación, ya que:

- Cualquier isolínea individual puede ser utilizada para hallar la orientación de la superficie, que será la normal a la isolínea en cualquiera de sus puntos.
- La distancia entre isolíneas en la dirección de la pendiente más pronunciada, puede ser usada para estimar el gradiente.
- El patrón espacial de isolíneas es indicativo de la forma de la superficie, incluidos elementos importantes como crestas, valles, “collados” ...
- Además, es posible conocer, en función del aumento de la distancia entre isolíneas, si la pendiente es cóncava o convexa.

Su densidad varía del modo más adecuado para obtener una representación fidedigna del fenómeno de la altitud, ya que guardan un intervalo mayor en las zonas planas que en las abruptas.

8.2.5 Rotulado de las curvas de nivel

Los valores de las curvas de nivel ofrecen un medio conveniente para leer las elevaciones representadas por las líneas de las curvas.

Su cantidad y ubicación depende de la naturaleza y configuración del terreno, densidad y cantidad de puntos de control y elevaciones acotadas. Las áreas montañosas de topografía compleja requieren un número mayor de valores de curvas de nivel que las de terrenos bajos. En la mayoría de los casos es necesario rotular solamente las curvas índices. Sin embargo, en zonas planas se rotulan las intermedias muy separadas para facilitar la interpretación del terreno. Los valores de las curvas de nivel se centran en los ejes de las líneas y no se ubican muy cercanos a los puntos de control horizontal y vertical o elevaciones acotadas además se deben eludir casas etc.

Cuando se rotulen las curvas de nivel, se ubicarán series de números en forma tal que progresen en curvas suaves hacia la mayor elevación, evitando una apariencia mecánica o demasiado regular. Los valores de curvas de nivel resultan más eficaces cuando se los ubica en los declives casi al final de los contrafuertes o estribaciones, a los

costados de las salidas y cerca de cambios pronunciados de topografía. En ningún caso se ubicarán los valores en serie a ambos lados de cualquier colina, tratando de evitar siempre el aspecto del reflejo de un espejo. Si el espacio lo permitiera, los valores de las curvas de nivel se añadirán a curvas suplementarias y de depresión siempre se las muestre.

8.2.6 Relación entre la escala y la equidistancia

La diferencia de cotas o altitud entre curvas de nivel se denomina equidistancia vertical. En función del plano, tipo de terreno y precisión altimétrica se presenta la siguiente tabla:

Escala	Equidistancia (m)
1:500	0,25 a 0, 50
1:1.000	1
1:2.000	2
1:5.000	5
1:10.000	10
1:25.000	25
1:50.000	50
1:100.000	100

Tabla 4. Relación escala vs equidistancia

8.2.7 Modelos digitales de elevación DEM

Los modelos digitales de elevación (DEM por su sigla en inglés) son estructuras de datos numéricos que representan la distribución espacial de la elevación sobre la superficie terrestre —*la piel de la tierra*— (Garzón, Jiménez y Hernández, 2017). La caracterización de los complejos rasgos topográficos terrestres tradicionalmente se ha hecho a partir del interpolador *Red de Triángulos Irregulares* [TIN] desarrollado por (Peucker, 1968) obedeciendo a una función lineal, mientras que la geometría de la naturaleza no lo es.

Debido a su estructura los DEM permiten ser almacenados y analizados sin necesidad de trabajar directamente sobre la superficie real; la mayoría de los usuarios SIG no tienen en cuenta la complejidad del fenómeno captado, obviando elementos fundamentales como líneas de ruptura, zonas de recorte, puntos acotados, y lo más importante: el algoritmo de interpolación, haciendo una elección de éste, más por razones de presentación en términos de su apariencia visual, que por razones que obedezcan a la relación que existe entre la geometría de la forma que se busca representar y su interpolador, esta complejidad impone un reto a las técnicas automatizadas de los DEM, el problema que se pone de manifiesto, es el de querer comparar *la piel de la tierra* —que se comporta como una función continua de puntos infinitos y que en términos de modelación será definida incompletamente— con otra que proviene de intervalos discretos (puntos muestreados finitos) que serán generalizados y en consecuencia no podrá ser exactamente determinada; esta generalización produce pérdida de información que afecta el error del DEM que se transmitirá a aquellos productos derivados que puedan ser aplicados a escala local.

9. INTERPOLACIÓN

Muchas veces, una función $y = f(x)$ se da en términos de variables discretas como $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$. ¿Cómo hallar el valor de y en cualquier otro valor de x ? Se puede usar una función continua $f(x)$ para representar los valores que pasan por los puntos $(n + 1)$ y poder predecir el valor de y en cualquier otro punto de x . Por su puesto que si x cae fuera del rango para el que se dan los datos ya no se trata de interpolación sino de extrapolación.

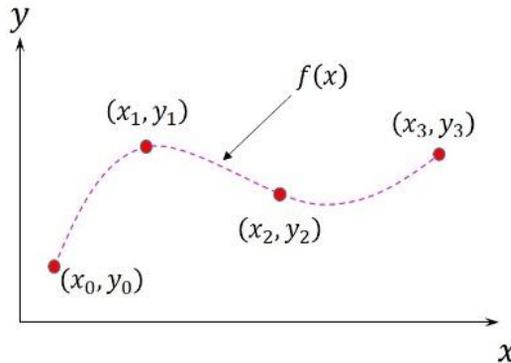


Figura 43. Interpolación de datos discretos⁴⁴

El problema de representación de las superficies topográficas naturales es que no existe un modelo matemático que permita representarlas de forma exacta, para ello se capturan datos discretos con instrumental topográfico, que consisten de una terna de coordenadas x, y, z , la variable dependiente z se denomina elevación, mientras que las variables independientes x, y pueden distribuirse formando una cuadrícula espaciada de manera regular o distribuida irregularmente. Dado un conjunto de datos de elevación $S = [P_1, \dots, P_n]$ donde $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ el problema fundamental es hallar una representación de la superficie. Con este procedimiento se busca codificar la cantidad mínima de información y conservar la mayoría de características superficiales, en otras palabras, debería parecerse a una superficie natural. La superficie topográfica es una distribución continua de la elevación sobre un número infinito de puntos en una región bidimensional, por tanto, se debe discretizar haciendo aproximaciones.

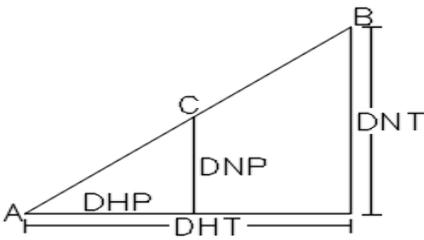
La interpolación es el mecanismo que permite estimar la elevación en zonas donde no se han capturado datos altimétricos, se basa en el principio de autocorrelación espacial, el cual mide el grado de relación o dependencia entre las elevaciones cercanas y las distantes (Garzón, Jiménez y Hernández, 2017).

⁴⁴ Fuente: los autores

9.1 Interpolación lineal

Para trazar las curvas de nivel de un terreno, se realiza un proceso de interpolación, para este fin, existen métodos rigurosos y otros más sencillos y prácticos de aplicar, es el caso de la interpolación lineal, que utiliza la semejanza de triángulos para determinar las cotas a una equidistancia requerida, se asume que el terreno entre los puntos a interpolar tiene pendiente constante.

Una forma general del método es la siguiente:



Se debe conocer la distancia horizontal total (DHT) entre los puntos *A* y *B* a interpolar, igualmente se debe conocer el desnivel total (DNT) entre estos puntos. Luego para hallar la cota de un punto *C* entre *A* y *B*, se realiza el siguiente procedimiento.

Por semejanza de triángulos se tiene que:

$$\frac{DHT}{DHP} = \frac{DNT}{DNP}$$

Donde:

DHT: distancia horizontal total entre *A* y *B*

DHP: distancia horizontal parcial entre *A* y *C*.

DNT: desnivel total entre *A* y *B*.

DNP: desnivel parcial entre *A* y *C*.

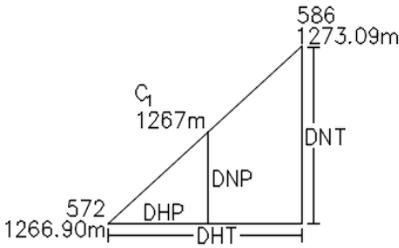
De los cuales *DHT*, *DNT*, *DNP* son datos conocidos, por lo tanto, se puede despejar *DHP*.

$$DHP = \frac{DHT \cdot DNP}{DNT} \left. \vphantom{\frac{DHT \cdot DNP}{DNT}} \right\} \text{Despejando la } DHP$$

Ejemplo

Interpolar la línea entre los puntos 572-586

Punto	x(m)	y(m)	z(m)
572	47629,970	21093,180	1266,900
586	47630,750	21103,070	1273,090



Se tiene cada punto con su respectiva Z , es necesario hallar las cotas con una equidistancia de 1m, es decir hallar las cotas cerradas: 1267, 1268, 1269, 1270, 1271, 1272 y 1273 m.

Se realiza el procedimiento explicado anteriormente, para el punto C_1 el cual tiene una cota entera de 1267 m.

$$DHP_{C_1} = \frac{DHT \cdot DNP}{DNT} \quad \left. \vphantom{\frac{DHT \cdot DNP}{DNT}} \right\} \text{ Interpolación para el punto } C_1$$

$$DHT = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 9,921 \text{ m}$$

$$DNT = z_2 - z_1 = 1273,09\text{m} - 1266,90\text{m} = 6,19 \text{ m}$$

$$DNP = z_2 - z_1 = 1267\text{m} - 1266,90\text{m} = 0,10 \text{ m}$$

Reemplazando los valores se tiene que:

$$DHP_{C_1} = \frac{9,921\text{m} \cdot 0,1\text{m}}{6,19\text{m}} = 0,160\text{m} \quad \left. \vphantom{\frac{9,921\text{m} \cdot 0,1\text{m}}{6,19\text{m}}} \right\} \begin{array}{l} \text{Hallando el valor para la elevación 1267,} \\ \text{Para las demás cotas solo cambia el } DNP \end{array}$$

Los cuales deben ser medidos desde A hacia B en el plano, y se marca el punto con su respectiva elevación cerrada. El mismo procedimiento se realiza con los demás puntos en esa línea y se ubican en el plano a escala. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos.

Punto	Elevación cerrada (m)	DNP (m)	DHP (m)
C_1	1267	0,1	0,160
C_2	1268	1,1	1,763
C_3	1269	2,1	3,366
C_4	1270	3,1	4,969
C_5	1271	4,1	6,571
C_6	1272	5,1	8,174
C_7	1273	6,1	9,777

9.2 Triangulación de Delaunay

La superficial topográfica real es continua con infinitas variaciones, si su modelo matemático está formado por un gran número de puntos tomados directamente del terreno, (modelo determinístico), la calidad del mismo será alta, no obstante, la realidad es muy diferente y el número de puntos que constituye el modelo suele ser pequeño en relación con la superficie a representar.

Será necesario disponer de una herramienta matemática que permite estimar la elevación (Z) de un punto de la superficie que no coincida con ninguno de los vértices de la red triangular. En topografía se usan triángulos porque son los polígonos más simples y tienen muchas propiedades favorables, como que representan una superficie coplanar. Previo al proceso de interpolación, es necesario definir una triangulación entre los puntos topográficos que se capturaron para hacer la representación superficial. Estos triángulos deberán satisfacer la siguiente condición: “*la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la red no debe contener ningún vértice de otro triángulo*” (ESRI, 2011). Por lo tanto, la diagonal que se deberá elegir para una triangulación correcta en el siguiente conjunto de puntos es la 1-3 y no la 2-4.

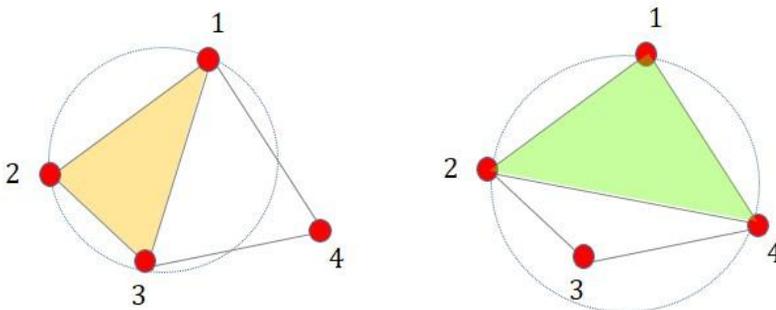


Figura 44. Triangulación de Delaunay⁴⁵

Esta triangulación fue inventada por el matemático Ruso *Boris Nikolaevich Delonese* en 1934. Este modelo maximiza los ángulos interiores de los triángulos, lo cual resulta muy práctico porque al usar este modelo como estructura tridimensional los errores de redondeo son muy bajos. Por eso, en general se usan triangulaciones de Delaunay en aplicaciones de topografía.

Para trazar las circunferencias, se deberán trazar los bisectores perpendiculares de cada eje del triángulo, luego se trazará la circunferencia en el punto de intersección de bisectores, y se deberá comprobar que las líneas radiales desde el centro tengan la misma longitud.

⁴⁵ Fuente: los autores

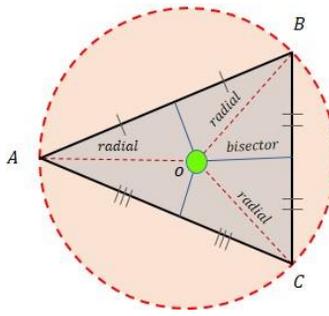


Figura 45. Triangulación de Delaunay⁴⁶

9.3 Los polígonos de Thiessen o Voronoi

Los *Polígonos de Thiessen*, también conocidos como *Polígonos de Voronoi*, son el método de interpolación más simple, basado en su separación horizontal, siendo especialmente apropiada cuando los datos son cualitativos. Se crean al unir los puntos entre sí, trazando las mediatrices de los segmento de unión (ESRI, 2011). Tales mediatrices se deberán prolongar hasta intersectarse con otras generando la red de polígonos.

Para realizar la conversión de un diagrama de Voronoi a un diagrama de Delaunay es suficiente con aplicar las propiedades de ambos diagramas: (1) Cada vértice del diagrama de Voronoi debe ser centro de un círculo que contenga al menos tres puntos de la nube en su contorno. (2) Cada región definida por este diagrama es convexa, (3) El bisector entre dos regiones del plano formará parte del diagrama de Voronoi si y sólo si puede trazarse un círculo con centro en el bisector y que contenga en su contorno a los dos puntos (uno de cada región) sin contener a ningún otro punto en ningún otro lugar (Departamento de Matemática Aplicada UPM, 2017).

Este modelo es muy apropiado para definir el área de incidencia de un punto, también se usa para hallar el sitio más alejado de un conjunto de puntos, encontrar el punto más cercano a un lugar del plano cualquiera, averiguar dónde situar un punto para que su área de influencia sea mayor teniendo en cuenta los puntos ya existentes en el plano (Okabe, Boots, Sugihara, & Nok, 2000).

⁴⁶ Fuente: los autores

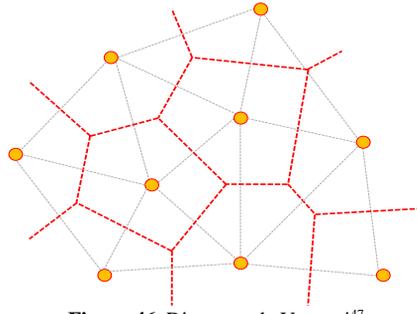


Figura 46. Diagrama de Voronoi⁴⁷

9.4 Red de Triángulos Irregulares (TIN)

La caracterización de los complejos rasgos topográficos terrestres tradicionalmente se ha hecho a partir del interpolador *Red de Triángulos Irregulares* (TIN⁴⁸ por sus siglas en inglés) desarrollado por (Peucker, Fowler, Little, & Mark, 1976), el algoritmo crea de una red conformada por triángulos irregulares cuyos vértices son los puntos que definen los principales accidentes de la superficie del terreno, los triángulos se proyectan sobre un plano horizontal, que conecta sus nodos con segmentos de recta, esto se conoce como triangulación.

Este modelo de interpolación lineal considera la superficie con caras continuas formadas por triángulos. La dirección normal o perpendicular a la pendiente de la superficie es constante en toda la extensión de cada triángulo, sin embargo, a medida que se cruce un borde que separa dos triángulos adyacentes la dirección normal cambia bruscamente obedeciendo a la del siguiente triángulo.

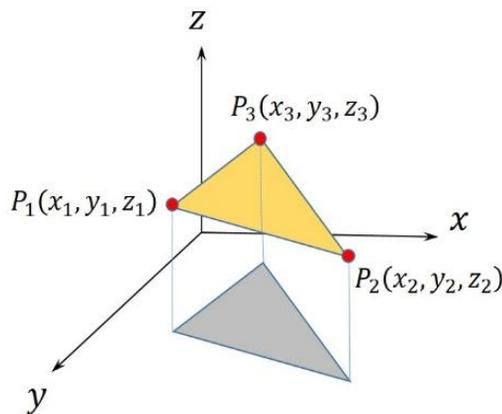


Figura 47. representación vectorial de un plano que pasa a través de tres puntos⁴⁹

⁴⁷ Fuente: los autores

⁴⁸ Triangular Irregular Network

⁴⁹ Fuente: los autores

En la interpolación lineal, los valores de la superficie a interpolar se calculan basados solamente en los valores de Z para los nodos que definen la parte interna del triángulo. El valor de la superficie en un punto determinado se obtiene mediante la intersección de una línea vertical con el plano definido por los tres nodos. La ecuación generalizada para la interpolación lineal de un punto x, y, z en un triángulo es:

$$A_x + B_y + C_z + D = 0 \tag{51}$$

Donde, los coeficientes A, B, C, D se calculan sabiendo que este plano pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$.

Dada la posición de los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, de tres nodos no colineales (A, B, C) de un triángulo TIN, para calcular la ecuación del vector del plano que pasa a través de los tres nodos se puede obtener a partir de los productos de los vectores $(\vec{b} - \vec{a}), (\vec{c} - \vec{a})$, y $(\vec{p} - \vec{a})$ así:

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \tag{52}$$

Donde \vec{p} es la posición del vector de un punto $P(x, y, z)$ que corresponde al plano ABC

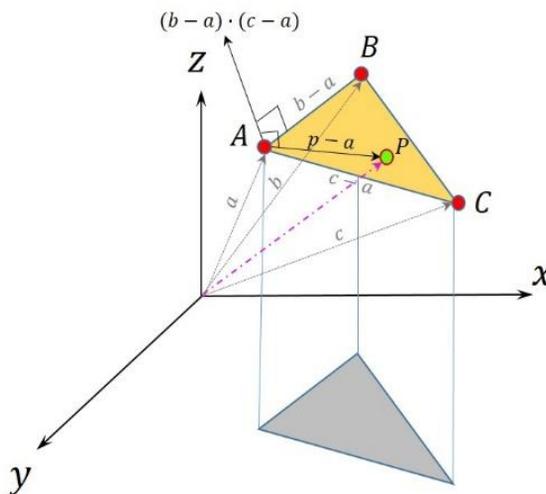


Figura 48. ecuación de planos usando álgebra de vectores⁵⁰

$$[(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}] = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \tag{53}$$

⁵⁰ Fuente: los autores

Modelo matemático:

ecuación general:

$$z(x, y) = a_0 + a_1X + a_2Y \quad (54)$$

Es necesario definir la posición de un punto que se encuentre dentro del triángulo, por ejemplo: $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$.

Se debe resolver el conjunto de ecuaciones $F = A \cdot x$

$$F = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \alpha; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \alpha; \quad x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Finalmente, estimar z para la ubicación (x, y) :

$$z_{x,y} = [1 \ X \ Y] \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación del plano que pasa a través de los puntos: $A[2,2,4]; B[0,4,5]; C[3,3,2]$

$$a = 2_i + 2_j + 4_k$$

$$b = 0_i + 4_j + 5_k$$

$$c = 3_i + 3_j + 2_k$$

$$p = x_i + y_j + z_k$$

$$b - a = -2_i + 2_j + 1_k$$

$$c - a = 1_i + 1_j - 2_k$$

$$(b - a) \cdot (c - a) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} k$$

$$(b - a) \cdot (c - a) = -5_i - 3_j - 4_k$$

$$p - a = (x - 2)_i + (y - 2)_j + (z - 4)_k$$

$$\begin{aligned}
(b - a) \cdot (c - a) \cdot (p - a) &= -5(x - 2) - 3(y - 2) - 4(z - 4) \\
5(x - 2) - 3(y - 2) - 4(z - 4) &= 0 \\
-5x + 10 - 3y + 6 - 4z + 16 &= 0 \\
-5x - 3y - 4z + 32 &= 0 \\
5x + 3y + 4z - 32 &= 0 \\
4z &= -5x - 3y + 32 \\
z &= -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y + 8
\end{aligned}$$

9.5 Elementos en la superficie de un TIN

La configuración de la superficie del terreno se da a partir de una nube de puntos con coordenadas tridimensionales, esta colección de puntos con distribución totalmente irregular, será el inicio para la representación de las formas topográficas, aquí se aproxima a una superficie matemática discreta formada por superficies elementales planas triangulares, que se definen a partir de los puntos de coordenadas tridimensionales.

La calidad del modelo se puede aumentar de manera significativa si se añaden *elementos auxiliares* que refinan la representación superficial del terreno, como *puntos acotados* y *elementos lineales* que intervienen en este proceso.

Los *puntos acotados* también llamados cotas altimétricas, son localizaciones puntuales en las que se ha medido en el terreno su valor Z. Su importancia es fundamental debido a dos cosas: su localización y precisión. Muchos de ellos se encuentran en lugares que tienen una altura relativa superior o inferior a la zona que los rodea. Esto permite conocer en muchas ocasiones cual es el sentido de la pendiente. Otros se sitúan en áreas donde la variabilidad topográfica no puede ser abarcada por las curvas de nivel debido a su equidistancia, de modo que son la única información acerca del relieve de esos lugares.

Los *elementos lineales* representan objetos naturales como cursos de aguas, o elementos artificiales como vías, su característica principal es que agregan nodos y bordes al modelo TIN. Se identifican las líneas de ruptura (*Breaklines*), las líneas estructurales y las zonas de recorte.

Las *líneas estructurales* permiten a aquellos sectores con altimetría explícita se logren ajustar a la estructura del terreno. Los más importantes lo constituyen las *divisorias* y *redes de flujo*.

Ambos elementos suelen situarse en zonas cuya altimetría cambia de manera constante, y pueden ser identificados a partir de las curvas de nivel que se arquean en sentido de la corriente en el caso de la red de drenaje, y en el sentido apuesto cuando se trata de líneas partidoras o divisorias.

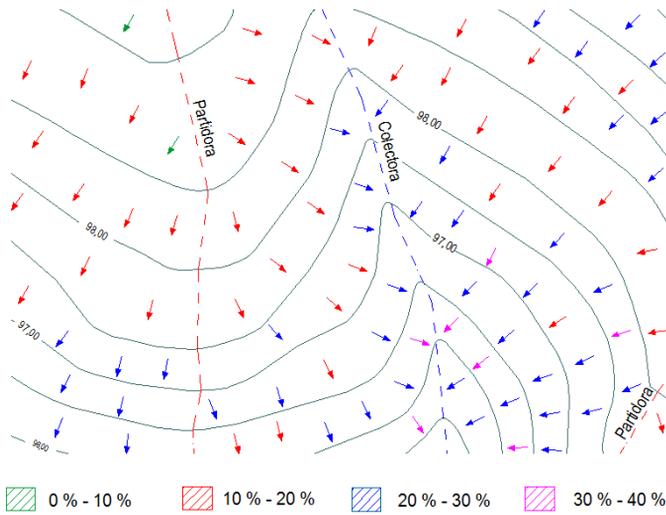


Figura 49. Identificación redes de flujo y líneas divisorias naturales⁵¹

La orientación de laderas en una cuenca produce cambios de pendiente en las redes de drenaje, el agua que corre por estas redes es atraída por gravedad hacia las partes más bajas, de modo que se producen formas altimétricas diferentes. Las partidoras de la red se consideran un elemento complementario a la de drenaje, pues son las que determinan los límites de la cuenca de recepción. A cada uno de sus lados la orientación es diferente y generalmente se asocian a las mayores pendientes.

Las *líneas de ruptura (breaklines)* representan discontinuidades o cambios bruscos en la zona modelada, ayudan a controlar el comportamiento de la superficie en términos de suavidad y continuidad, por esta razón tienen un efecto significativo en función de la descripción de la superficie.

Pueden describir y forzar cambios en el comportamiento de las formas. Los valores de elevaciones a lo largo de ellas pueden ser constantes o variables a través de su longitud. En un modelo TIN los *breaklines* se convierten en una secuencia de uno o más ejes de modifican el esquema de triangulación generando nuevos triángulos con lados y vértices comunes a ambos lados de la línea de ruptura.

⁵¹ Fuente: los autores

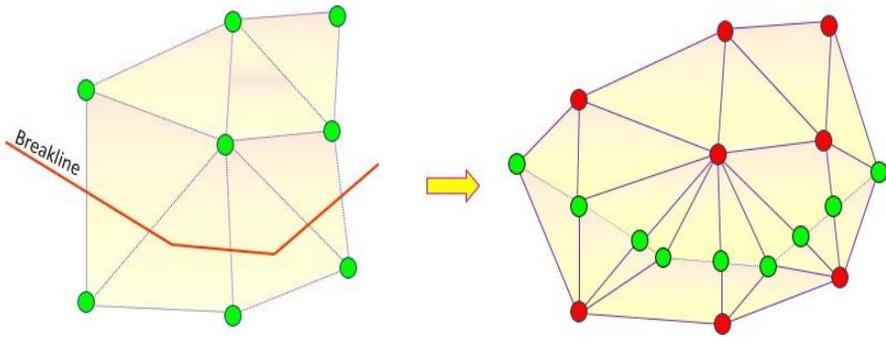


Figura 50. Integración de TIN y línea de ruptura⁵².

Las *zonas de recorte* indican los límites más allá de los cuales la interpolación no se debe realizar, también conocidos como *Boundary*. Cabe la posibilidad de que la zona de recorte no sea única, de modo que en un mismo modelo puedan existir dos zonas interpoladas separadas por otra no interpolada.

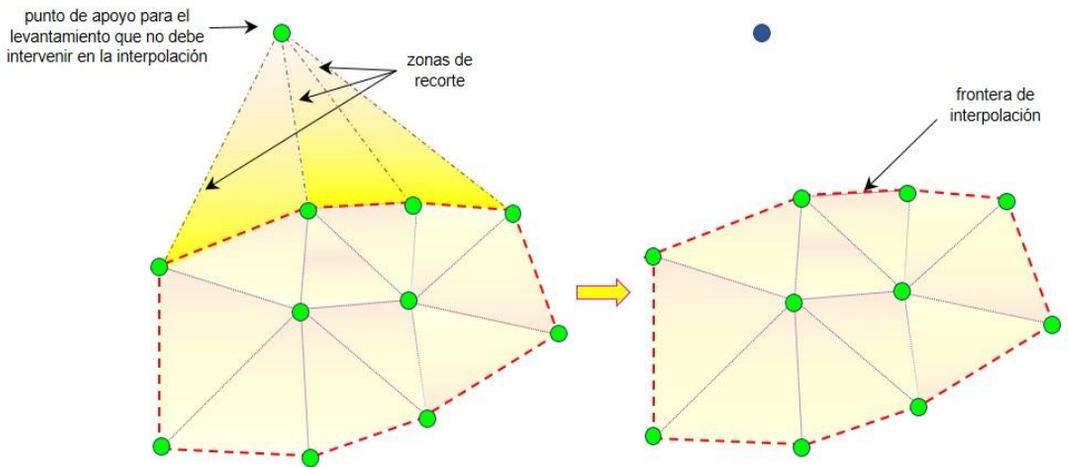


Figura 51. Zonas de recorte y definición de fronteras.⁵³

Aun cuando se use la *triangulación de Delaunay*, los ejes no siempre garantizan la coincidencia con las líneas predominantes del terreno, para dar solución a este problema se deben forzar ciertos ejes, haciendo flexible el criterio de *Delaunay*, y primando el concepto de línea de ruptura.

En la siguiente figura se percibe una corriente de agua que debería ser continua, pero la dirección del drenaje se ve afectada por la condición de triangulación, como se acaba de plantear el *breakline* hace que se logre definir de manera correcta la dirección del flujo.

⁵² Fuente: los autores

⁵³ Fuente: los autores

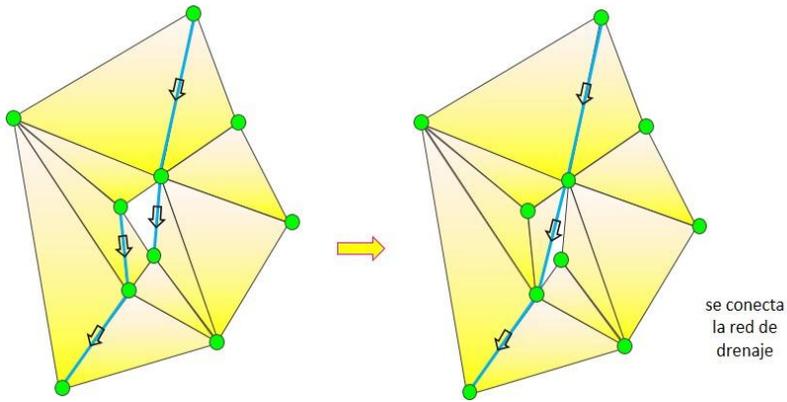


Figura 52. Integración triangulación y línea de ruptura⁵⁴.

Ejercicios propuestos

1. De la siguiente lista de puntos de un estudio topográfico se necesita dibujar las curvas de nivel con una equidistancia de $1m$ a una escala $1/500$.

Punto	Norte	Este	Elevación	Descripción
1	1000	1000	100	terreno
2	977	990	98	terreno
3	1015	1037	102	terreno
4	983	1026	99	terreno
5	965	1014	97	terreno
6	990	1049	100	terreno
7	966	1051	100	terreno
8	1000	971	100	terreno
9	1025	1001	102	terreno
10	966	971	94	terreno

2. La siguiente lista de puntos son datos de un estudio topográfico realizado por puntos destacados.

ID	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	1	5	4
2	6	4	5,7
3	4	3	9,5
4	1	1	3
5	3	1	4,06
6	7	2	3,7

⁵⁴ Fuente: los autores

a. Utilizando el método de interpolación TIN calcule la Z en los puntos a, b, c.

ID	X(m)	Y(m)	Z(m)
a	2,5	1,2	
b	2,8	3	
c	2	3,5	

10. APLICACIONES DE LOS PLANOS TOPOGRÁFICOS

Un concepto fundamental para los análisis que involucran información territorial es el de “la complejidad de las formas del terreno”, de acuerdo con (Pedraza, et al., 1996) toda forma del terreno es susceptible de ser descompuesta en otras más sencillas, hasta llegar a la unitaria o elemental, la superficie plana, representada por una pendiente. Atendiendo a este concepto, la unidad de referencia principal en la superficie de la tierra es la pendiente. Las diferentes pendientes y sus asociaciones con el relieve, permiten separar las formas básicas: puntos acotados, e isolíneas que en conjunto con todos los elementos comunes de la geometría terrestre definen un mapa topográfico.

Los mapas topográficos proporcionan gran cantidad de información sobre la condición física de un área limitada de la superficie terrestre, este tipo de modelación y sus productos derivados han tenido un protagonismo indiscutible en el ámbito geoinformático los últimos 25 años con diversos propósitos: ingeniería civil e infraestructura (Petrie & Kennie, 1987), planificación en el manejo de recursos naturales (Fisher, 1996), modelación de procesos erosivos potenciales (Mitasova, et al., 1996) (Ren, et al., 2011), modelación hidrológica (Jana, et al., 2007), construcción de modelos predictivos multi-variantes de sitios de potencial arqueológico (Vaughn & Crawford, 2009), ingeniería militar (Fleming, et al., 2009) (Maio, et al., 2013), detección de cambios geomorfológicos (James, et al., 2012) y estudios de impacto climático (Hong, et al., 2005), (Marquès, et al., 2013).

10.1 Interpretación del relieve

Para poder interpretar un mapa topográfico, se necesitan conocer tres factores:

1. Escala, que puede ser numérica y/o gráfica. Permite usar una regla (escalímetro) para medir las distancias reales en el terreno.
2. Dirección y grado de la inclinación, son las consideraciones más importantes en una planificación de terreno y diseño debido a su efecto sobre la estabilidad de la inclinación y el drenaje del agua de la superficie, el método para calcular la inclinación se discute en la siguiente sección. Esencialmente, en un mapa topográfico la inclinación es la diferencia de elevación entre dos curvas de nivel dadas, expresadas en pendiente o proporción.
3. El intervalo, es la diferencia en elevación entre curvas de nivel.

10.1.1 Perfiles longitudinales y transversales

Un perfil se considera una serie de elevaciones tomadas a lo largo de una línea que genera una intersección entre un plano vertical y la superficie del terreno, esta intersección produce una vista lateral de la superficie.

La superficie constituye un punto de partida para la planeación detallada y el replanteo de vías de comunicación, así como para el cálculo de rellenos y trazo óptimo de las rutas con respecto a la topografía. Como primer paso, se replantea y marca el eje longitudinal; lo cual implica establecer y monentar los puntos a intervalos regulares. De esta forma, se genera un perfil longitudinal a lo largo del eje de la vía, Las alturas de los puntos que forman dicho perfil se determinan auxiliándose de la altura conocida del instrumento. Primero se coloca la mira sobre un punto de estación, la altura del instrumento se forma por la suma de la lectura de la mira y la altura del punto de estación conocido. Posteriormente, se restan las lecturas de la mira (en los puntos del perfil transversal) de la altura del instrumento; con lo cual se obtienen las alturas de los puntos en cuestión. Las distancias del punto de estación hacia los diferentes puntos de los perfiles transversales se determinan mediante cinta o de forma óptica, empleando el nivel. Al representar gráficamente un perfil longitudinal, las alturas de los puntos de estación se muestran a una escala mucho mayor que aquella a la que se representa los puntos de dirección longitudinal, la cual está relacionada a una altura de referencia en números enteros.

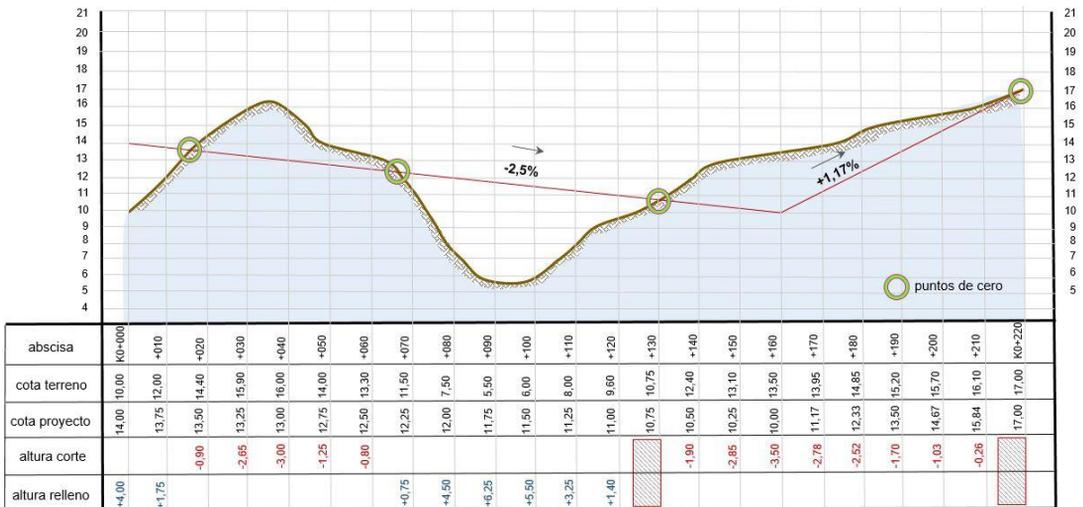


Figura 53. Perfil longitudinal⁵⁵

⁵⁵ Fuente: los autores

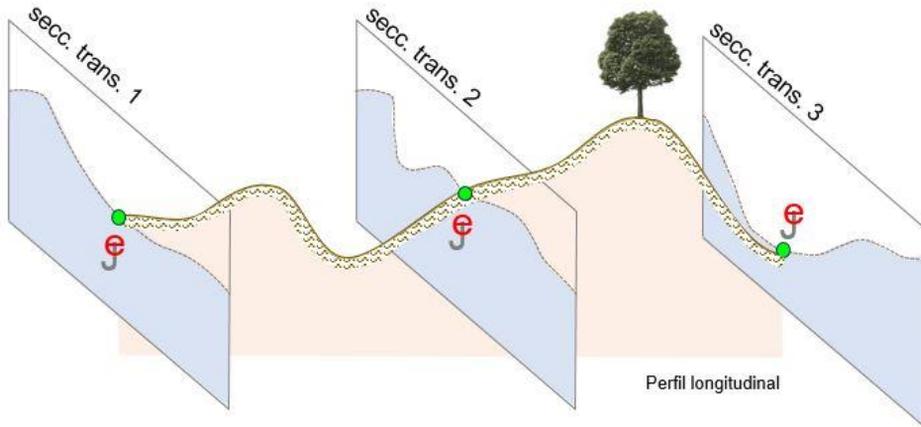


Figura 54. Perfil transversal o sección⁵⁶

10.1.2 Cómo elaborar un perfil

Para elaborar un perfil, se coloca el borde recto de una hoja de papel a lo largo de la línea elegida sobre el plano topográfico, se señalan las intersecciones de las curvas de nivel, teniendo en cuenta las elevaciones de ríos, picos, y demás puntos destacados. Posteriormente se traza una línea base del perfil en una hoja de papel y se trasladan las señales obtenidas sobre él. Se trazan líneas verticales y se marca la elevación en una escala vertical, elegida con gran cuidado teniendo en cuenta la topografía o el uso futuro del perfil en muchos caso la relación de las dos escalas es de $\frac{1}{10}$. Una vez marcados todos los puntos, se une con una línea suave, no por varias líneas rectas a lo menos que se trata un perfil de un objeto construidos por el ser humano.

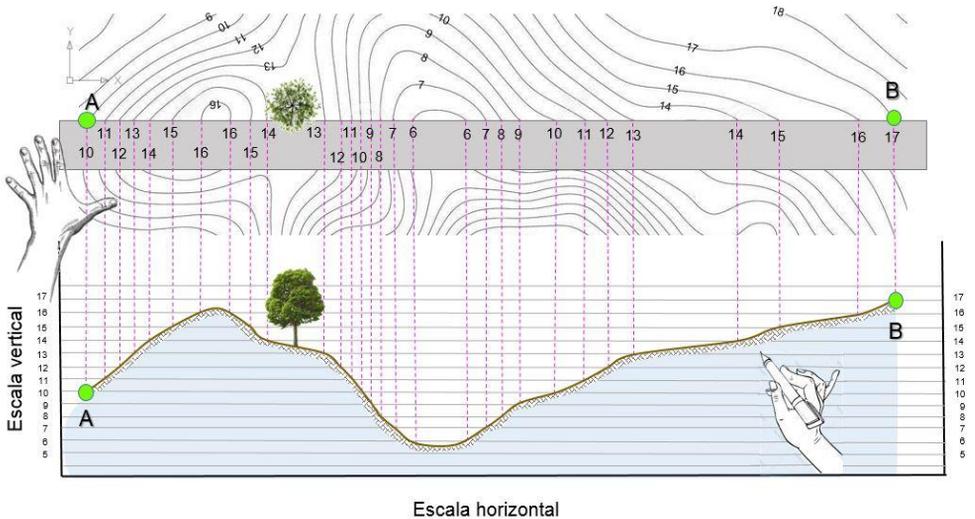


Figura 55. Trazado de un perfil⁵⁷

⁵⁶ Fuente: los autores

⁵⁷ Fuente: los autores

Es la determinación de la intervisibilidad entre puntos, o del área total visible desde una posición específica. Entre puntos se determina de la siguiente forma, se traza un perfil de la línea visual, desde el punto de observación al otro punto; si la línea deja libre todas las elevaciones que se hallan en ella, los puntos son visibles.

El otro método es de área total, para lo cual se predetermina un área de cobertura, expresada en una magnitud angular y la altura instrumental del observador, A partir de la cobertura angular se divide está en segmentos, creando un gran cantidad de líneas, en cada una de estas se procede en la misma forma que para la determinación de visibilidad de un línea y posteriormente se demarca la zona que es visible. (Jimenez Cleves, 2015)

Ejemplo:

A partir del siguiente plano determinar la zona de visibilidad en el punto A.

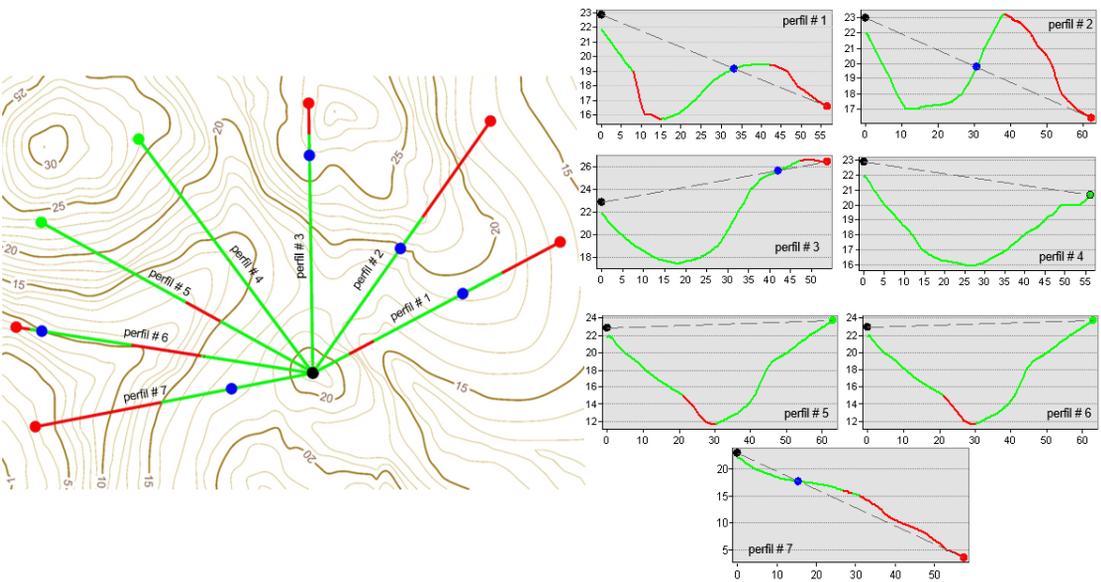


Figura 56. Análisis de visibilidad⁵⁸

Se trazan los perfiles, para cada una de estas líneas y a partir de las distancias obtenidas del perfil se determina el área visible, posteriormente y en función de la densidad de perfiles se puede marcar una zona de cobertura visual desde el punto de convergencia de los perfiles.

⁵⁸ Fuente: los autores

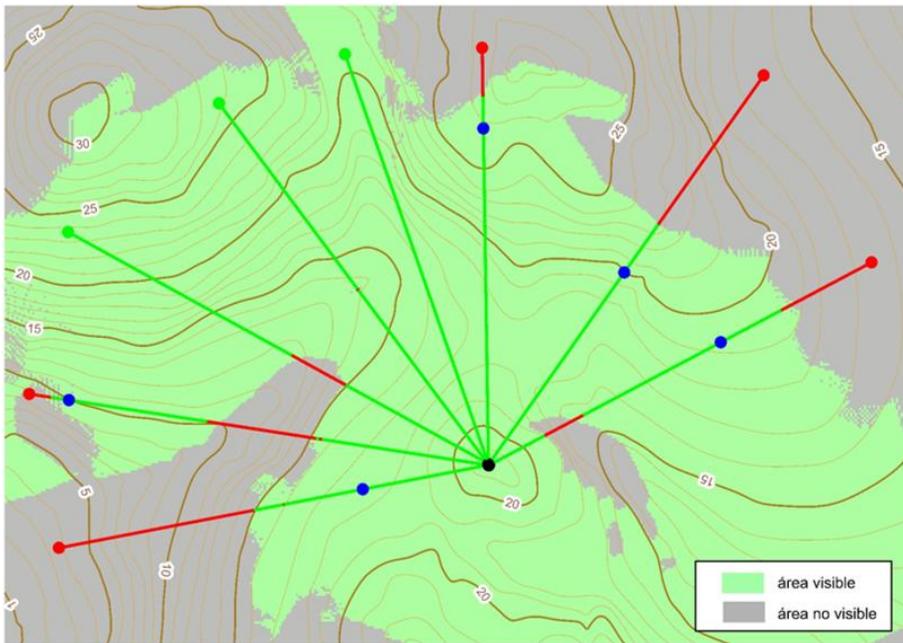


Figura 57. Zonas de visibilidad ⁵⁹

10.1.5 Línea de pendiente

Suponga que se nos pide determinar la línea de pendiente que conecta los puntos *A* y *B*, cuya pendiente máxima no debe exceder de 4%. Como el intervalo es de 5 *m*, la diferencia entre los niveles de las curvas es de 5 *m*. Entonces $L = D / G$, o bien $L = \frac{5,00}{0,04} = 125$, es la longitud mínima de la línea entre dos curvas de nivel cualesquiera.

Por tanto, como el punto *A* de partida, se traza un arco con un radio de 125 *m* que intersecta a la curva de nivel 145; la intersección es el punto *C*. Del mismo modo, con el punto *C* como centro, se encuentra el punto *D* sobre la curva de nivel 150, y con *D* como centro se localiza el punto *E* sobre la curva de nivel 155. Se debe notar que si se traza una línea recta de 125 *m* de longitud entre los puntos *E* y *G* (sobre la curva de nivel 160), una parte de esta línea estaría casi a nivel y la parte restante tendría una pendiente mayor del máximo de 4%.

Para esas condiciones se dibuja una curva a medio nivel (intervalo 2,5 *m*) entre la 155 y la 160 y se trazan los arcos *EF* y *FG* con radios de 125 / 2 o bien 62,50 *m*. (Parker, MacGuire, & Ambrose, 2013).

⁵⁹ Fuente: los autores

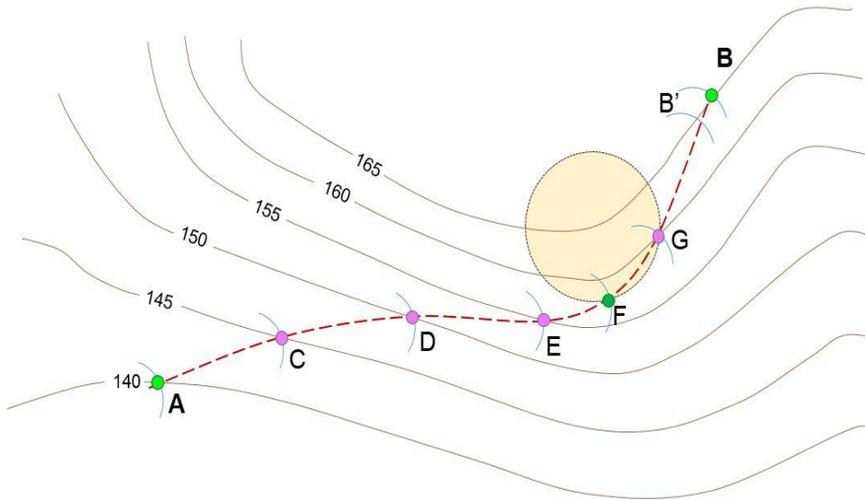


Figura 58. Línea de pendiente⁶⁰

Se construye entonces una curva que conecta los puntos E , F y G . Como los arcos son más largos que las líneas rectas entre los puntos E , F y G , las pendientes serán ligeramente menores que el máximo de 4%. Un arco con un radio de 125 m de intersecta a la curva 165 en el punto B' . Como la línea GB es ligeramente más larga que la GB' , la pendiente de GB es ligeramente menor que el 4% y por tanto la línea que indica que la línea de pendiente cumple los requisitos.

10.1.6 Punto de ceros

En el trazado de proyectos viales al momento de diseñar la rasante se encuentran alturas de corte y alturas de lleno, en algún lugar del abscisado habrá un cambio de corte a lleno o viceversa, apareciendo el punto de paso o punto de cero que es aquel donde coincide el proyecto con el terreno, es importante conocer su elevación y abscisa ya que ahí la altura de corte o de lleno es cero, por lo tanto, no hay movimiento de tierra en ese punto. Para encontrar dichos parámetros se utilizan la geometría analítica y álgebra lineal.

⁶⁰ Fuente: los autores

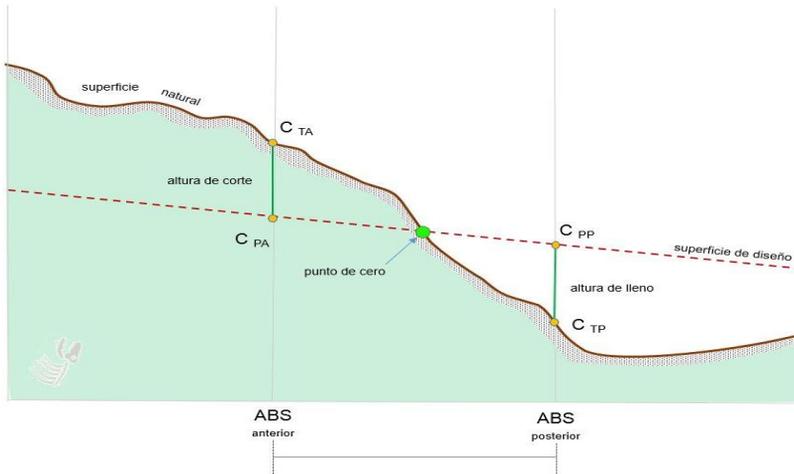


Figura 59. Línea de ceros⁶¹

El proceso matemático es el siguiente, como se asume que entre los puntos del abscisado tanto el terreno como el proyecto son líneas rectas, se debe hallar el punto de intersección de las dos utilizando un sistema lineal de ecuaciones; llamaremos T a la recta que representa los puntos del terreno en ese tramo y P a la recta que representa los puntos del proyecto en el mismo tramo.

Para hallar las ecuaciones de las rectas T y P se usa de la ecuación de la recta teniendo dos puntos que pasan por ella.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \left. \vphantom{y - y_1 = m(x - x_1)} \right\} \text{ 1. Ecuación de la recta punto pendiente.}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left. \vphantom{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \right\} \text{ 2. Ecuación de la pendiente de una recta.}$$

Donde y = elevación, x = abscisa

Hallando la ecuación de la recta T (recta terreno):

$$T: y - y_1 = m(x - x_1) \quad \left. \vphantom{T: y - y_1 = m(x - x_1)} \right\} \text{ 1. Ecuación de la recta } T.$$

$$\text{Donde: } y_1 = C_{TA} ; x_1 = ABS_A \quad \left. \vphantom{\text{Donde: } y_1 = C_{TA} ; x_1 = ABS_A} \right\} \text{ 2. Cambio de notación}$$

⁶¹ Fuente: los autores

$$m = \frac{C_{TP} - C_{TA}}{ABS_P - ABS_A} \quad \left. \vphantom{m} \right\} \text{ 3. Pendiente de la recta } T, \text{ cambio de notación.}$$

$$T: y - C_{TA} = \frac{C_{TA} - C_{TP}}{ABS_A - ABS_P} \cdot (x - ABS_A) \quad \left. \vphantom{T} \right\} \text{ 4. Reemplazando pasos dos y tres.}$$

Donde: C_{TA} : elevación de terreno anterior al punto de cero.
 ABS_A : abscisa anterior al punto de cero.
 C_{TP} : elevación de terreno posterior al punto de cero.
 ABS_P : abscisa posterior al punto de cero.

Hallando la ecuación de la recta P (recta proyecto):

$$P: y - y_1 = m(x - x_1) \quad \left. \vphantom{P} \right\} \text{ 1. Ecuación de la recta P.}$$

$$\text{Donde: } y_1 = C_{PA} ; x_1 = ABS_A \quad \left. \vphantom{\text{Donde}} \right\} \text{ 2. Cambio de notación.}$$

$$m = \frac{C_{PP} - C_{PA}}{ABS_P - ABS_A} \quad \left. \vphantom{m} \right\} \text{ 3. Pendiente de la recta P, cambio de notación.}$$

$$T: y - C_{PA} = \frac{C_{PP} - C_{PA}}{ABS_P - ABS_A} \cdot (x - ABS_A) \quad \left. \vphantom{T} \right\} \text{ 4. Reemplazando pasos dos y tres.}$$

Donde: C_{PA} : elevación de proyecto anterior al punto de cero.
 ABS_A : abscisa anterior al punto de cero.
 C_{PP} : elevación de proyecto posterior al punto de cero.
 ABS_P : abscisa posterior al punto de cero.

Luego, se debe hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{C_{TA}-C_{TP}}{ABS_A-ABS_P} \cdot (x - ABS_A) + C_{TA} \\ y &= \frac{C_{PP}-C_{PA}}{ABS_P-ABS_A} \cdot (x - ABS_A) + C_{PA} \end{aligned} \right\} \text{1. Sistema de ecuaciones para puntos de cero.}$$

Donde el par ordenado (x, y)

Es la solución del sistema dado en el punto uno con:

$$\begin{aligned} y &= \text{La cota del punto de cero} \\ x &= \text{La abscisa del punto de cero} \end{aligned}$$

Donde el par ordenado (x, y) es la solución del sistema y : elevación del punto de cero y x : abscisa del punto de cero.

10.1.7 Terraceo

Es la representación en planta de un terreno en el cual se ha efectuado un trabajo que cambia la forma natural del terreno. Su importancia consiste en que a través de ella se puede obtener previamente una visión de conjunto de cómo la obra que se va a construir afectará el terreno donde se asentará y sus alrededores. Si se tuviera este conocimiento previo, se podrían evitar o corregir en el trazado los problemas que se presentarán al efectuar *cortes* o *rellenos*. Es necesario que este plano tenga puntos de referencia permanentes para su control horizontal y que se localicen en el terreno, ya que las terrazas tendrán que marcarse posteriormente, usando métodos planimétricos.

10.1.8 Determinación gráfica de puntos de chaflán

Punto de chaflán: Es la intersección del terreno natural y el proyecto.

Sobre un plano topográfico se ubica el proyecto a implantar, en este caso un el rectángulo de línea punteada que indica una terraza, cuya cota roja o de diseño es 10,00 m.

Nótese que la terraza en sus cuatro esquinas tiene la misma cota roja, de tal forma que tendrá pendiente = 0%, así mismo, la curva de nivel 10 atraviesa la plataforma, por tanto, esta línea define el límite entre corte y relleno.

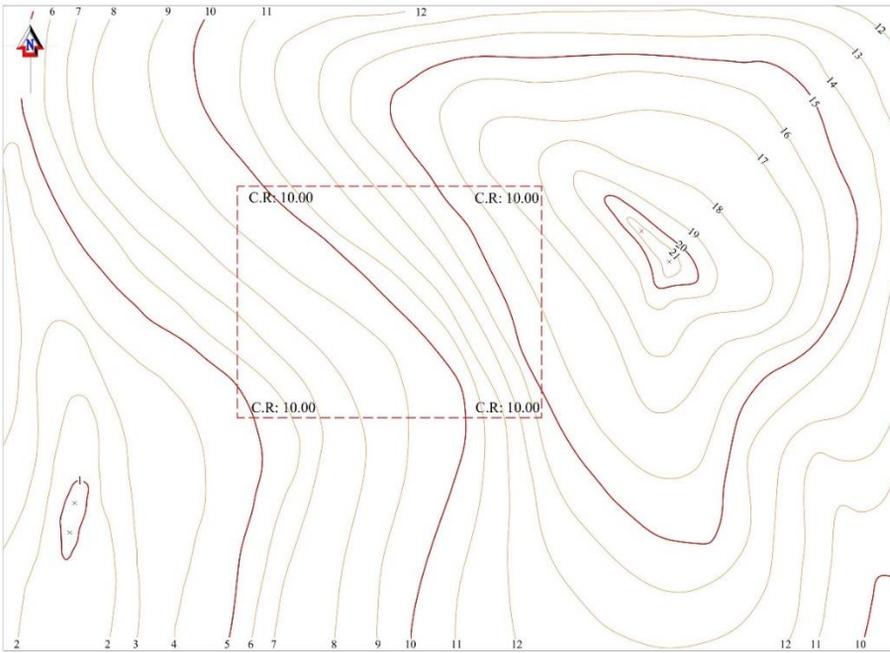


Figura 60. Proyecto de terraza pendiente 0%⁶²

La definición de las relaciones *horizontal/vertical* (H:V) de la superficie de los taludes deberá obedecer a procedimientos y criterios para su conformación propios de un estudio geotécnico, en este caso, y con fines académicos se usará para corte 2:1 y para relleno 3:2

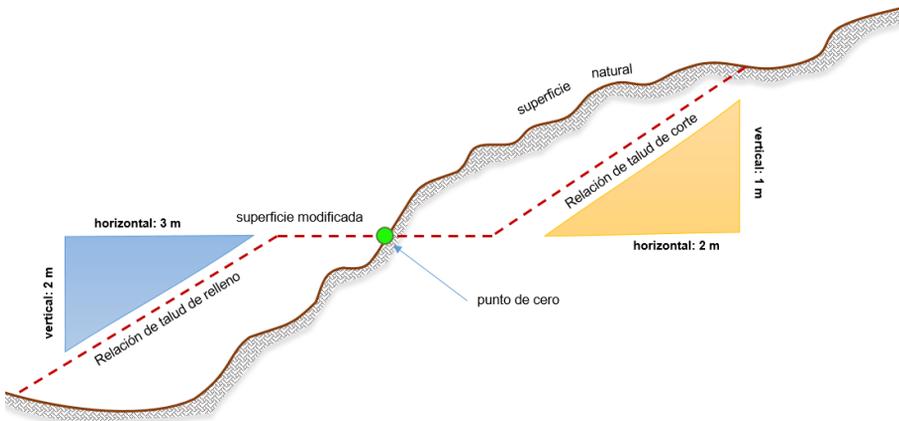


Figura 61. Relación de taludes.⁶³

Ahora, se procede a trazar las líneas correspondientes a las curvas de nivel de diseño de la terraza, como esta tiene pendiente = 0%, las isóneas serán paralelas a ella. Su

⁶² Fuente: los autores

⁶³ Fuente: los autores

separación es diferente para la zona de corte y de relleno, esto debido a las relaciones H:V que se indicaron antes.

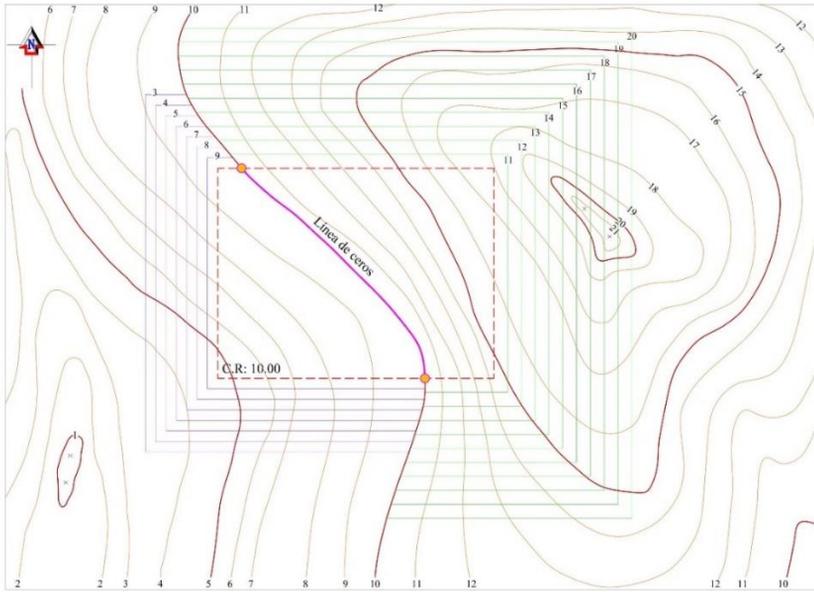


Figura 62. Líneas de futuras curvas de nivel⁶⁴

Se traza la línea de chaflán a partir de la intersección de ambas superficies, la natural con la de diseño, esta línea definirá el límite de la unión del terreno natural con la plataforma de diseño conservando la relación de taludes propuesta.

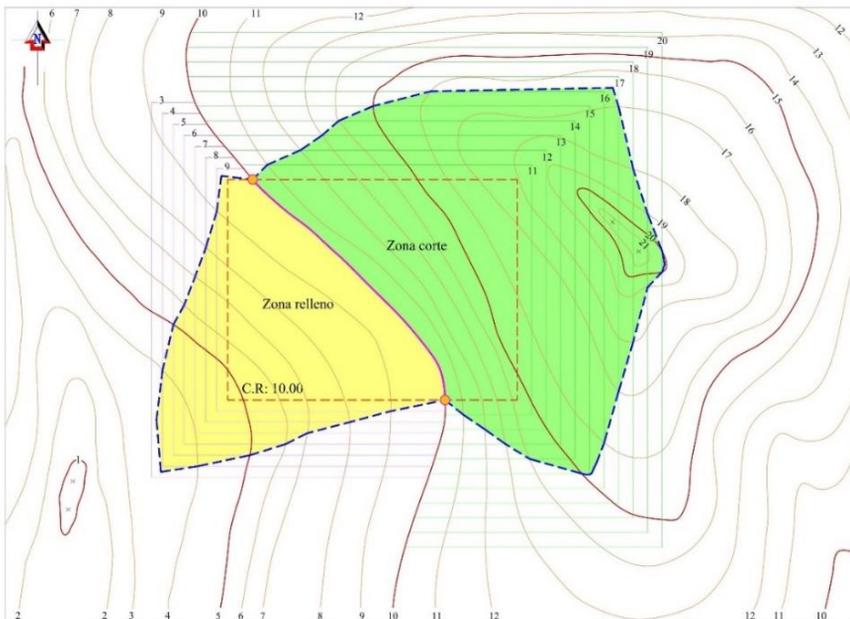


Figura 63. Proyecto final⁶⁵

⁶⁴ Fuente: los autores

⁶⁵ Fuente: los autores

Finalmente, para trazar las curvas de nivel del proyecto bastará con seguir la curva de nivel en su forma natural hasta llegar a la línea de chaflán, donde cambiará su dirección y tomará la de la isolínea de diseño hasta salir nuevamente a la línea de chaflán, donde tomará de nuevo la dirección de la curva de nivel natural.

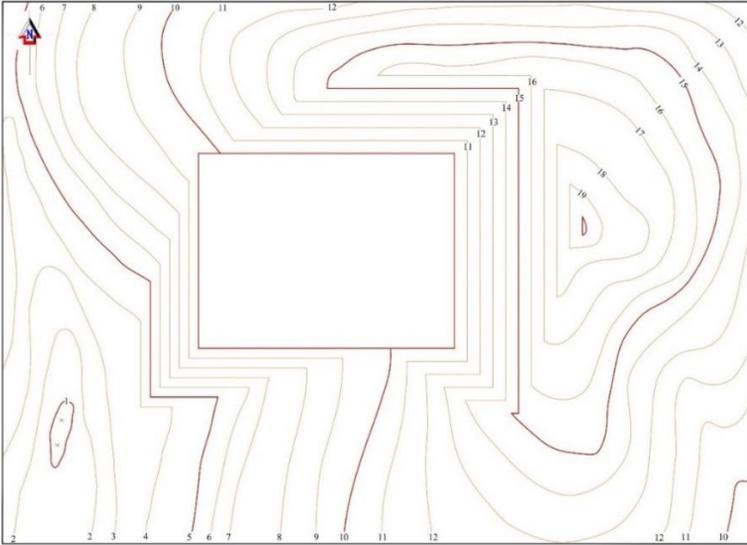


Figura 64. Curvas de nivel finales⁶⁶

Ahora, para modificar un poco el ejercicio inicial, se cambiarán un par de parámetros como cota roja de la terraza y pendiente en dos direcciones. A partir del punto A (con cota de diseño 12,00) se definirán dos pendientes hacia el oeste deberá conservarse pendiente de -12% y hacia el sur -5%.

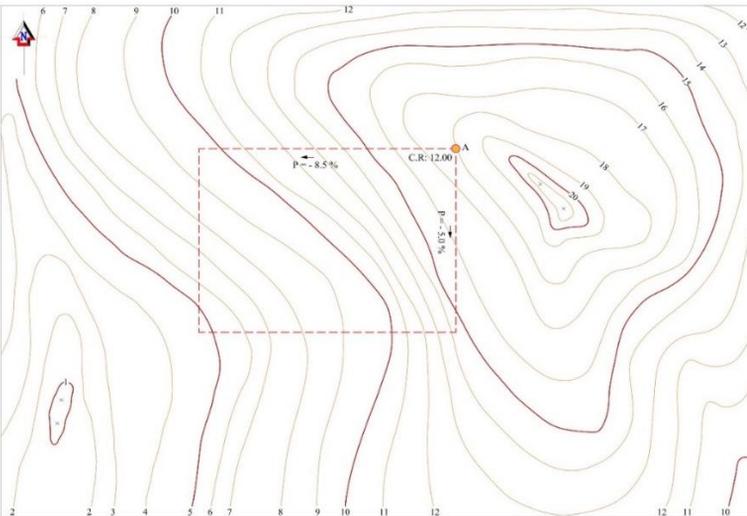


Figura 65. Proyecto de terraza⁶⁷

⁶⁶ Fuente: los autores

⁶⁷ Fuente: los autores

Es necesario calcular las cotas de diseño en las tres esquinas restantes de la terraza teniendo en cuenta su distancia horizontal y las pendientes señaladas anteriormente. Tomando como referencia el punto A, hacia el oeste la cota roja será 8,60, hacia el suroeste 7,10 y hacia el sur 10,50. Nótese que entre las cotas rojas de las esquinas de la terraza pasan cotas redondas como la 11, 10, 9, y 8. Este es el efecto que produce la pendiente sobre la terraza, por lo cual, la plataforma será inclinada en dos ejes. Puede ser muy útil trazar perfiles de los bordes de la terraza para detectar puntos de cero, a partir de donde se levantarán líneas normales a la terraza. Es así como se lograron detectar dos puntos de cero en la plataforma, el primero en la cota 8 y el otro en la 9. Ahora se trazarán las isolíneas de diseño de la plataforma usando las mismas relaciones de talud del ejercicio anterior. Es importante indicar que en esta ocasión las isolíneas de diseño no serán por ningún motivo paralelas a la terraza (debido a la pendiente) y que sus separaciones horizontales para el área de corte serán diferentes a las del área de relleno.

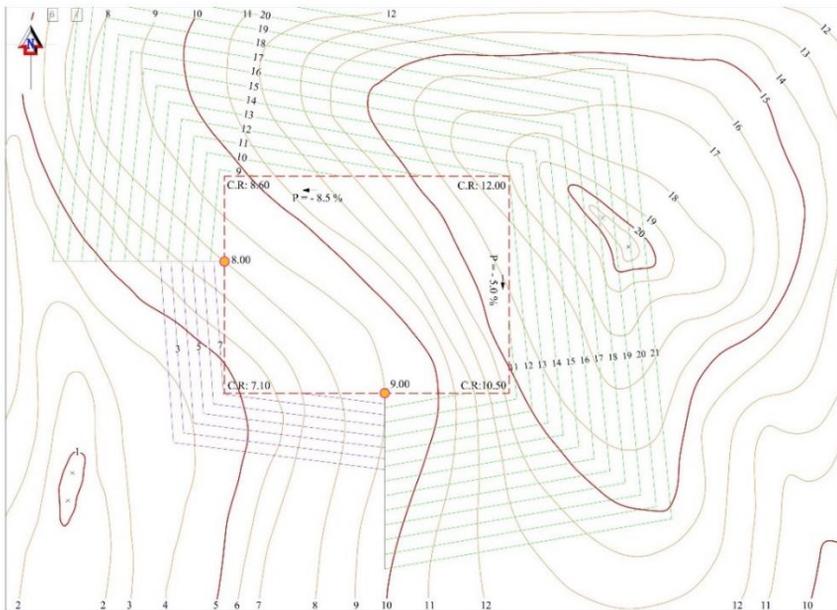


Figura 66. Líneas de talud⁶⁸

Ahora se tienen dos superficies: natural y diseño, por lo cual se cuenta con lo necesario para definir la línea de chaflán de igual manera que en el ejercicio anterior, es decir, trazando una línea que marque la intersección de las dos superficies. Para delimitar con precisión la zona de corte y relleno sobre la plataforma se recomienda trazar perfiles, y sobre ellos trazar la pendiente de diseño, allí se podrá detectar donde se cortan las

⁶⁸ Fuente: los autores

superficies y bastará con pasar estos puntos al plano donde se está haciendo el procedimiento.

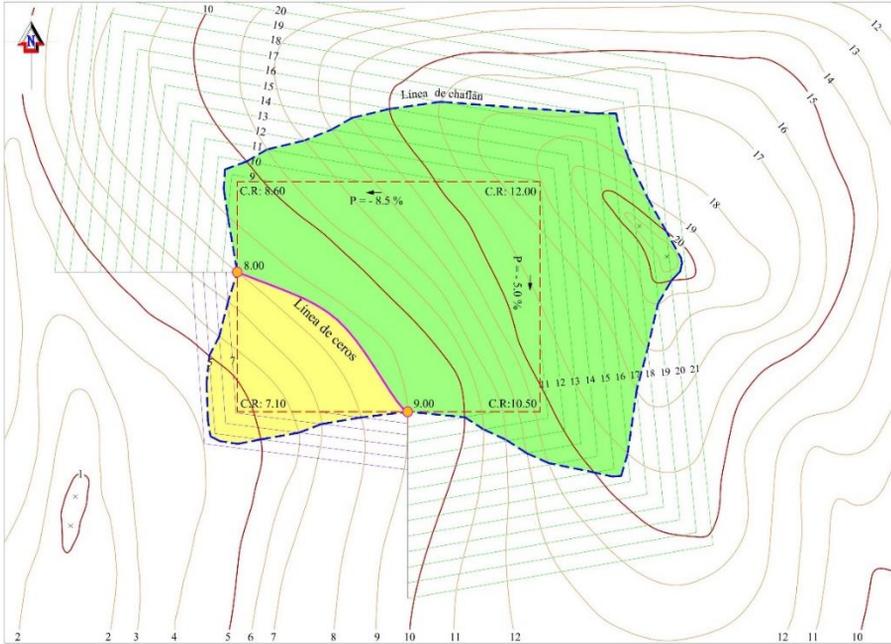


Figura 67. Terraza con pendientes⁶⁹

Al igual que en el ejercicio de la terraza sin pendiente, para trazar las curvas de nivel definitivas del proyecto, bastará con seguir la curva de nivel en su forma natural hasta llegar a la línea de chaflán, donde cambiará su dirección y tomará la de la isolínea de diseño hasta salir nuevamente a la línea de chaflán, donde tomará de nuevo la dirección de la curva de nivel natural.

⁶⁹ Fuente: los autores

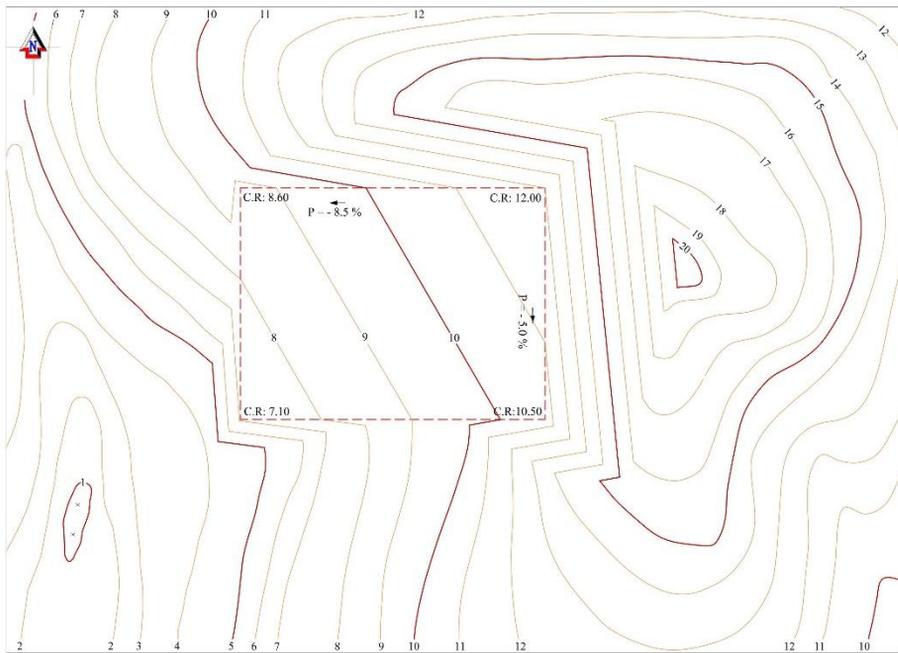


Figura 68. Topografía final ⁷⁰

10.2 Movimientos de tierra

Cuando se decide modificar la topografía de un terreno con el fin de adecuarlo para un propósito determinado, es porque se conoce en detalle la geometría de esa porción de superficie terrestre, las dos variables fundamentales de esta son el área y el volumen.

En topografía el área de un terreno se considera como la proyección ortogonal de la superficie sobre un plano horizontal. Para determinar áreas, se emplean diferentes métodos, entre estos el de coordenadas.

El volumen se considera la magnitud física que expresa la extensión de un cuerpo en tres dimensiones: largo, ancho y alto.

La medición directa de volúmenes, por lo regular no se efectúa en topografía, ya que es difícil aplicar realmente una unidad de medida al material por cubicar. En su lugar se emplean mediciones indirectas determinando líneas y áreas que tengan relación con el volumen deseado.

⁷⁰ Fuente: los autores

10.2.1 Características generales de los movimientos de tierra

La tecnología para los movimientos de tierra consiste básicamente en la extracción del suelo por excavación, el transporte del material obteniendo al lugar de lleno y la configuración de los rellenos de acuerdo con su destino.

La elección de la tecnología adecuada para los trabajos de movimientos de tierra depende en gran medida de las propiedades y el tipo de suelo y de la magnitud prevista de los volúmenes de las obras.

Las propiedades de los suelos influyen en el balance de los volúmenes de corte y lleno, ya que no todos los suelos de una excavación sirven como material de lleno y parte de otros suelos debe ser trasladada al sitio de la obra.

El cálculo de volúmenes se realiza varias veces en todas las fases del proyecto. En los estudios de localización de la obra proyectada la magnitud de los movimientos de tierra es tomada en cuenta como uno de los criterios para su implantación.

10.2.2 Volúmenes

Con frecuencia el topógrafo tiene que determinar volúmenes de diversos materiales en los proyectos que necesariamente generan un movimiento de tierra, dichos volúmenes afectan en gran manera el presupuesto de las obras, por esta razón es de vital importancia el dominio de los métodos para el cálculo de volúmenes de tierra.

Acá es importante dar respuesta a lo siguiente; ¿Qué es el volumen? Intuitivamente podemos decir que el volumen es el espacio que ocupa un cuerpo sin importar su estado, pero mirando un poco desde el punto de vista matemático qué significa el volumen de un sólido, comenzando con unos sólidos sencillos que se observan a continuación.

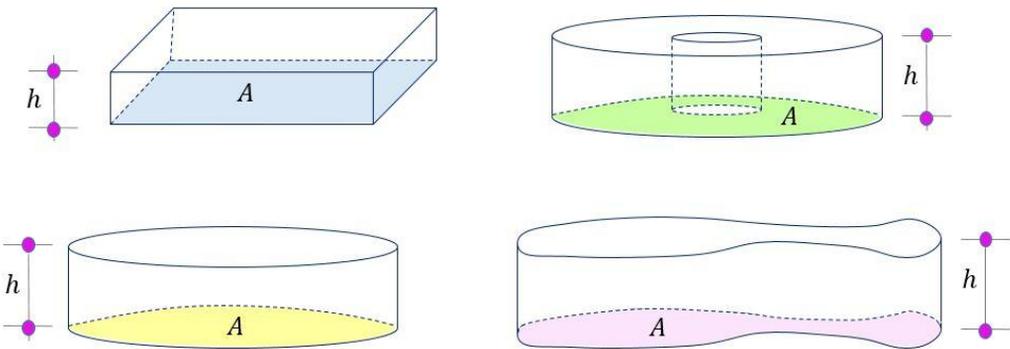


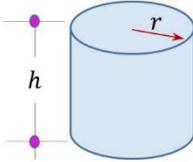
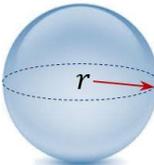
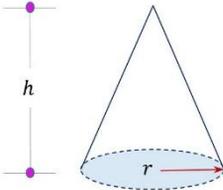
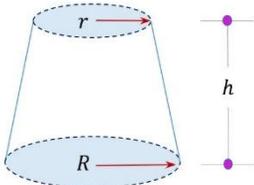
Figura 69. Volúmenes de sólidos⁷¹

⁷¹ Fuente: los autores

En cada gráfico el sólido se genera desplazando una región plana conocida como base a lo largo de una distancia h en dirección perpendicular a la base, por lo tanto, el volumen del sólido se define como el área A de la base multiplica por su altura h (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

$$V = A \cdot h \tag{57}$$

En la siguiente tabla se tienen las fórmulas para obtener los volúmenes de los sólidos más utilizados en geometría y topografía.

Sólido	Figura	Fórmula
Cilindro circular recto		$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Esfera		$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
Cono		$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Tronco de un cono circular recto		$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r^2 + rR + R^2) \cdot h$

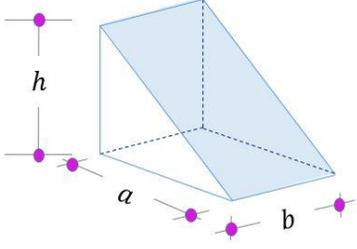
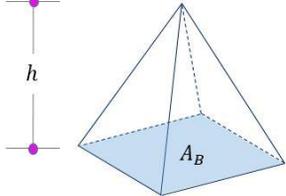
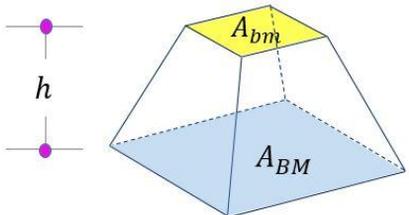
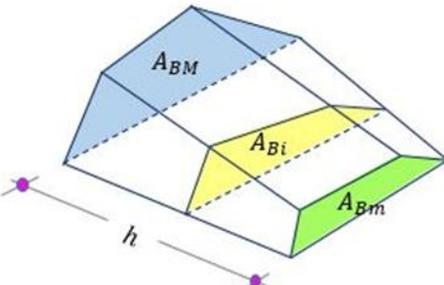
Sólido	Figura	Fórmula
Cuña		$V = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot b \cdot h)$
Pirámide		$V = \frac{1}{3} \cdot (A_B) \cdot h$
Pirámide Truncada		$V = \frac{h}{3} \cdot (A_{BM} + A_{bm} + \sqrt{A_{BM} \cdot A_{bm}})$
Prismoide		$V = \frac{h}{6} \cdot (A_{BM} + A_{Bm} + 4A_{Bi})$ A_{BM} : área base mayor A_{Bm} : área base menor A_{Bi} : área base intermedia a $h/2$

Tabla 5. Volúmenes de sólidos

Ahora, considerando el volumen de un sólido con la propiedad de que su sección transversal perpendicular a un eje tenga área conocida, este eje es x y el área de la sección transversal en x es $A(x)$, $a \leq x \leq b$ (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

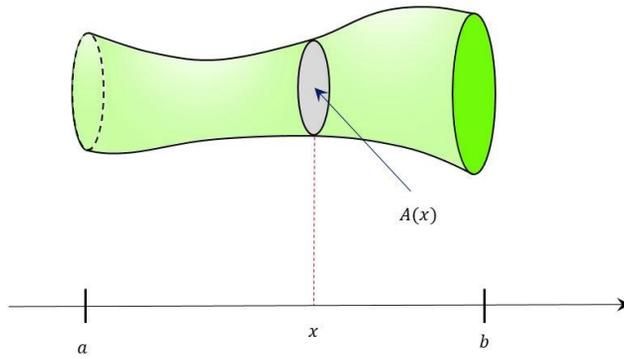


Figura 71. Punto muestra⁷²

El volumen del sólido debe estar dado, de manera aproximada, por la suma de Riemann.

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i \quad (58)$$

Donde \bar{x}_i es llamado punto muestra, en otras palabras, es cualquier abscisa del movimiento de tierra y Δx_i es la distancia horizontal entre las abscisas.

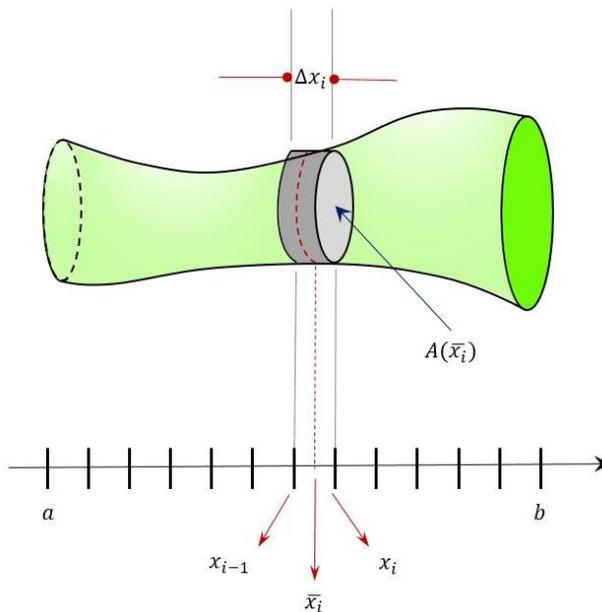


Figura 72. Punto de muestra en cualquier número de intervalo⁷³

Haciendo que la norma de la partición tienda a cero, se obtiene una integral; la cual se define como el volumen del sólido.

$$V = \int_a^b A(x) \cdot dx \quad (59)$$

⁷² Fuente: los autores

⁷³ Fuente: los autores

En un contexto topográfico se divide el intervalo $[a, b]$ insertando todos los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ donde x_i con $i = 0, 1, 2, \dots, n$ son los puntos del abscisado del eje, es decir $x_0 = k0 + 000$ y así sucesivamente, dependiendo del intervalo de abscisa elegido por el diseñador (5m, 10m, 20m), de acuerdo al proyecto a desarrollar, donde x_n es el final del abscisado.

Método para el cálculo de volúmenes

Métodos de secciones transversales

Este método generalmente es utilizado en proyectos lineales, consiste en generar perfiles transversales a lo largo de un eje materializado a intervalos fijos (5, 10 o 20m) llamados abscisas, marcados con la siguiente notación $k0 + 000$ así sucesivamente hasta el final del eje, luego se dibujan sus secciones transversales y se calculan las áreas para finalmente calcular el volumen.

Tipos de secciones transversales

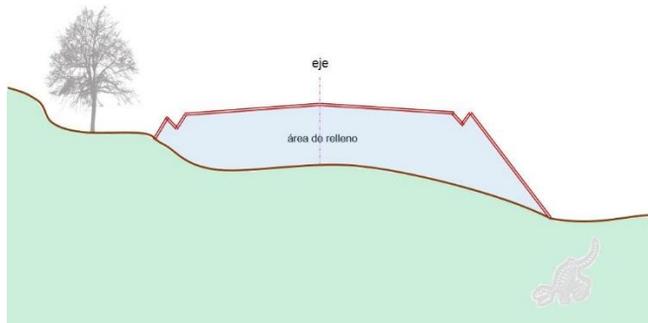


Figura 73. Sección transversal en relleno⁷⁴

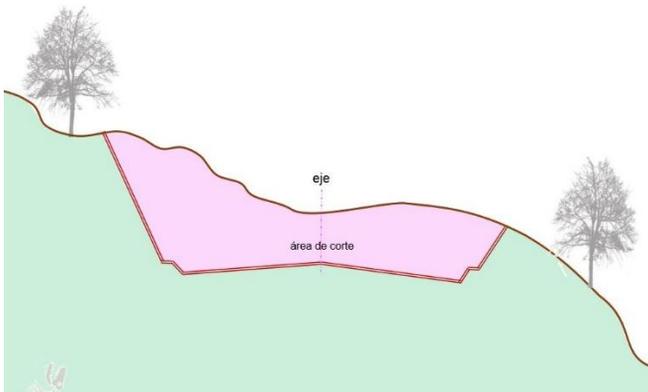


Figura 74. Sección transversal en corte⁷⁵

⁷⁴ Fuente: los autores

⁷⁵ Fuente: los autores

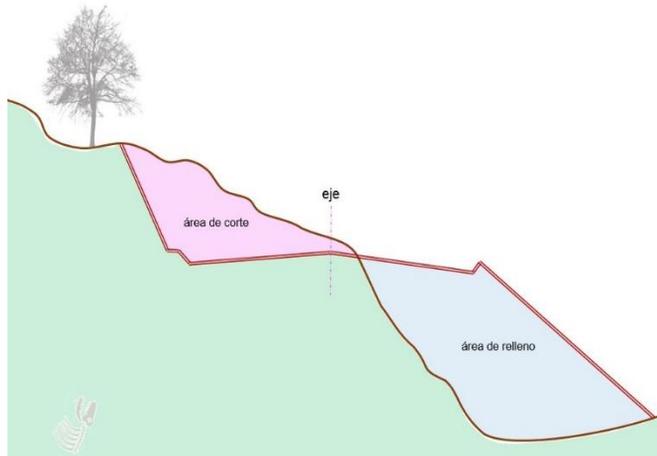


Figura 75. Sección transversal mixta⁷⁶

Para calcular el volumen entre dos secciones estas deben cumplir unas condiciones mínimas.

1. Que las secciones sean consecutivas.
2. Que las dos secciones estén en corte o en lleno.
3. Que una de las secciones sea de corte o lleno y la otra mixta.

A continuación, se estudian tres casos de acuerdo a la forma de las secciones.

Caso 1. Cuando las secciones son homogéneas y son del mismo tipo, es decir, las dos en corte o las dos en lleno.

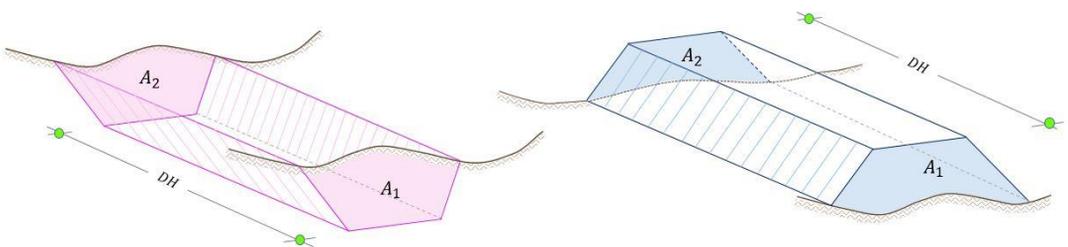


Figura 76. Sección transversales en corte y lleno⁷⁷

Para este caso se usa.

$$V = \left(\frac{A_1 + A_2}{2} \right) \cdot DH \tag{60}$$

Donde:

⁷⁶ Fuente: los autores

⁷⁷ Fuente: los autores

V : volumen entre secciones.

A_1 : área de la sección inicial.

A_2 : área de la sección siguiente.

DH : distancia horizontal entre las dos secciones o diferencia de abscisas.

Caso 2. Cuando las secciones no son homogéneas, pero son del mismo tipo, es decir, las dos en corte o las dos en lleno.

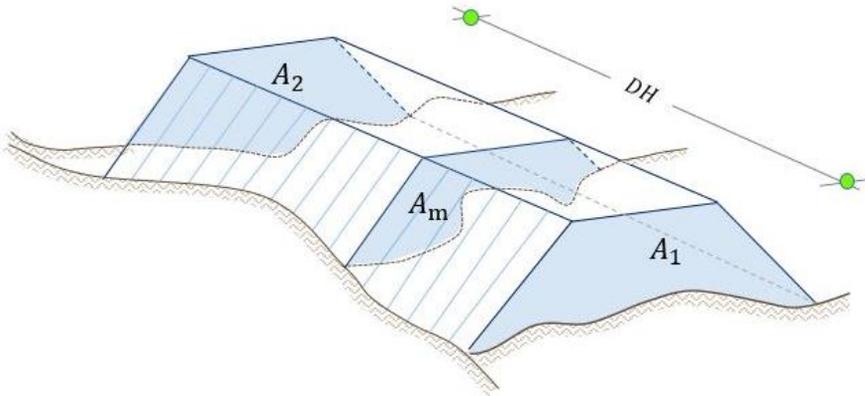


Figura 77. Secciones transversales no homogéneas⁷⁸

Para este caso utilizamos la siguiente fórmula.

$$V = \left(\frac{A_1 + A_m + A_2}{6} \right) \cdot DH \quad (61)$$

Donde:

V : volumen entre secciones.

A_1 : área de la sección inicial.

A_m : área de la sección intermedia ($h/2$).

A_2 : área de la sección siguiente.

DH : distancia horizontal entre las dos secciones o diferencia de abscisas.

Nota: El área intermedia A_m no es el promedio de las áreas extremas A_1 y A_2 , es el área de la sección localizada en la mitad de la distancia entre las secciones extremas. Por lo tanto, se debe localizar, dibujar y luego calcular el área

Caso 3. Cuando las secciones son de diferente tipo, es decir, una en corte y la otra en lleno.

⁷⁸ Fuente: los autores

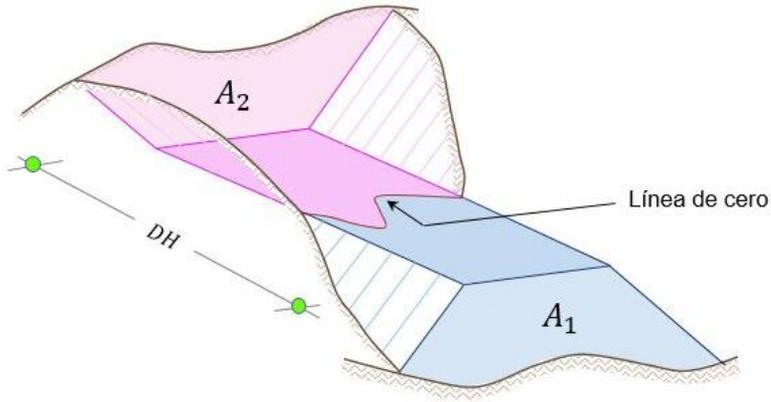


Figura 78. Línea de ceros⁷⁹

En este caso la recomendación es realizar una sección que pase por el punto de cero ubicado en el perfil longitudinal, de seguro esta sección será mixta por lo tanto se puede calcular el volumen de corte y de lleno por separado. En la mayoría de los casos alguna de las áreas o las dos tanto en lleno como en corte, será muy pequeña, en estos casos se utiliza:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}) \cdot DH \quad (62)$$

V : volumen entre secciones.

A_1 : área de la sección inicial.

A_2 : área de la sección siguiente.

DH :distancia horizontal entre las dos secciones o diferencia de abscisas.

10.2.3 Cálculo de volúmenes por el método de curvas de nivel

Los volúmenes basados en las curvas de nivel se determinan a partir de planos topográficos midiendo con el planímetro la superficie limitada por cada curva y multiplicando el promedio de las áreas de dos curvas sucesivas por la equidistancia, o sea aplicando la fórmula del prisma. Este método de las curvas de nivel es apropiado para determinar volúmenes sobre grandes áreas.

10.2.4 Exactitud del cálculo de Volúmenes

La exactitud de los volúmenes está determinada por las siguientes características:

⁷⁹ Fuente: los autores

1. la exactitud del mapa de curvas de nivel
2. El intervalo de las curvas de nivel
3. La exactitud de medir el área de cada curva de nivel

Los volúmenes basados en modelos TIN tiende a ser más exactos que los basados en modelos de cuadrícula, debería realizarse estudios de este tipo para conformaciones topográficas propias del país. (Jimenez , 2003)

Ejercicios propuestos

1. Dibujar las siguientes secciones transversales con los siguientes datos y calcular el volumen de lleno y corte:
 - Chaflán en lleno 2/1; chaflán en corte 1/2
 - Altura de lleno en K0+060: 2 m
 - Pendiente de la vía -2%.
 - Ancho de banca 4 m. La banca es horizontal sin bombeo.

Datos de las secciones.

Sección en K0+060

Izquierda		Eje	Derecha	
DH (m)	12,598	0	9,170	DH (m)
Elevación negra	913,701	916	915,415	Elevación negra

Sección en K0+080

Izquierda		Eje	Derecha	
DH (m)	5,754	0	11,074	DH (m)
Elevación negra	921,107	917,60	914,063	Elevación negra

Sección en K0+100

Izquierda		Eje	Derecha	
DH (m)	6,253	0	5,42	DH (m)
Elevación negra	921,705	919,20	920,039	Elevación negra

2. Usted ha sido contratado como topógrafo, para establecer el perfil de unos puntos que fueron nivelados sobre un terreno.

Abcisa	Elevación (m)
K0+000	1235,955
K0+020	1237,985
K0+040	1235,342
K0+054.34	1237,032
K0+060	1238,934

3. Con los datos obtenidos dibujar el perfil con una rasante constante de 6% iniciando en el K0+000 y finalizando en el K0+060, la cota proyecto en el K0+054,34 es de 1237,547 m. Calcular altura de corte y altura de lleno para cada punto del abscisado. Calcular las abcisas de los puntos de cero si los hay.

BIBLIOGRAFÍA

- Bannister , A., Raymond , S., & Baker, R. (2002). *Técnicas modernas en topografía*. Mexico: Alfaomega.
- Brinker , R. C., & Minnick , R. (1987). *The Surveying Handbook*. New York: SPRINGER SCIENCE+BUSINESS MEDIA, LLC.
- Casanova Matera, L. (2002). *Topografía plana*. Mérida: Taller de publicaciones de ingeniería, ULA.
- Committee, Federal Geodetic Control. (1990). *Standards and Specifications for Geodetic Control Networks*. Rockville, Maryland : United States .
- Departamento de Matemática Aplicada UPM. (10 de 12 de 2017). *Trinagulación de Delaunay*. Obtenido de http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_computacional_y_grafos/web/triangulaciones/delaunay.html
- Drewes, H., Kaniuth, K., Stuber, K., Tremel, H., Kahle, G., Straub, C., . . . Wildermann, E. (1995). The CASA'93 GPS campaign for crustal deformation research along the South Caribbean plate boundary. *J. Geodynamics*, 20, 129-144.
- ESRI. (2011). *ArcGIS Desktop: Release 10*. Redlands, CA: Environmental Systems Research Institute.
- Farjas Abadía, M. (2012). *La topografía y sus métodos. Principios de investigación*. Bilbao: Denboraren Argia.
- Fisher, P. F. (1996). Extending the applicability of viewsheds in landscape planning. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 1297-1302.
- Fleming, S., Jordan, T., Madden, M., Usery, E. L., & Welch, R. (2009). GIS applications for military operations in coastal zone. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 213-222. doi:10.1016/j.isprsjprs.2008.10.004
- Garzon Barrero, J., Jiménez Cleves, G., & Hernandez Torres, F. L. (2017). Assessment of Non-Linear Interpolators to Construct Digital Elevation Models. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(15), 3873-3883. doi:10.3923/jeasci.2017.3873.3883
- Hong, Y., Nix, H. A., Hutchinson, M. F., & Booth, T. H. (2005). Spatial interpolation of monthly mean climate data for China. *Int. J. Climatol.*, 25, 1369-1379. doi:10.1002/joc.1187
- IGAC. (2005). *Resolucion 068 de enero 28 de 2005*.
- IPGH. (1978). *Especificaciones para mapas topográficos*. Bogota: IGAC.
- IPGH. (2013). *Guía de normas* (segunda ed.). Mexico, D.F.: Comité ISO/TC 211. Información Geográfica / Geomática .

- Irvine, W. (1975). *Topografía*. Cali: McGRAW-HILL.
- James, L. A., Hodgson, M. E., Ghoshal, S., & Latiolais, M. M. (2012). Geomorphic change detection using historic maps and DEM differencing: The temporal dimension of geospatial analysis. *Geomorphology*, 181–198. doi:10.1016/j.geomorph.2010.10.039
- Jana, R., Reshmidevi, T. V., Arun, P. S., & Eldho, T. I. (2007). An enhanced technique in construction of the discrete drainage network from low-resolution spatial database. *Computers & Geosciences*, 717–727. doi:10.1016/j.cageo.2006.06.002
- Jimenez, C. G. (2003). *Modelación de superficies terrestres urbanas aplicada a la región del eje cafetero*. Cali.
- Jimenez Cleves, G. (2015). *Altimetria*. Armenia: Universidad del Quindío.
- Jiménez Cleves, G., Vila Ortega, J. J., & Hurtado Bedoya, C. A. (1995). *Introducción al diseño de especificaciones*. Armenia.
- Kavanagh, B. F. (2010). *Surveying with construction applications*. New Jersey: Prentice Hall.
- Kellogg, J., & Vega, V. (1995). Tectonic development of Panama, Costa Rica and the Colombian Andes: Constraints from Global Positioning System, geodetic studies and gravity. *Geol. Soc.*, Special paper 295.
- Maio, C. V., Tenenbaum, D. E., Brown, C. J., Mastone, V. T., & Gontz, A. M. (2013). Application of geographic information technologies to historical landscape reconstruction and military terrain analysis of an American Revolution Battlefield: Preservation potential of historic lands in urbanized settings, Boston, Massachusetts, USA. *Journal of Cultural Heritage*, 317–331. doi:dx.doi.org/10.1016/j.culher.2012.08.002
- Marquès, M., Bangash, R. F., Kumar, V., & Sharp, R. (2013). The impact of climate change on water provision under a low flow regime: A case study of the ecosystems services in the Francoli river basin. *Journal of Hazardous Materials*, 224–232. doi:dx.doi.org/10.1016/j.jhazmat.2013.07.049
- Mitasova, H., Hofierka, J., Zlocha, M., & Iverson, L. R. (1996). Modelling topographic potential for erosion and deposition using GIS. *International Journal of Geographical Information Systems*, 629–641. doi:10.1080/02693799608902101
- Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., & Nok, S. (2000). *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. West Sussex, England: Wiley & Sons.
- Parker, H., MacGuire, J. W., & Ambrose, J. (2013). *Ingeniería de campo simplificada para arquitectos y constructores*. limusa.
- Pedraza, J., Carrasco, R. M., Díez Herrero, A., Marín Duque, J. F., Martín Ridaura, A., & Sanz Santos, M. A. (1996). *Geomorfología: principios, métodos y aplicaciones*. Madrid: Rueda.

- Petrie, G., & Kennie, T. M. (1987). Terrain modelling in surveying and civil engineering. *Computer-Aided Design*, 171–187. doi:10.1016/0010-4485(87)90066-2
- Peucker, T. K., Fowler, R. J., Little, J. J., & Mark, D. M. (1976). *Representation of three-dimensional surface by Triangulated Irregular Networks (TIN)*. Burnaby, Canadá: Department of Geography, Simon Fraser University.
- Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo* (Novena ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Ren, S.-m., Liang, Y., & Sun, B. (2011). Research on Sensitivity for Soil Erosion evaluation from DEM and Remote Sensing Data source of Different Map Scales and Image Resolutions. *Procedia Environmental Sciences*, 1753-1760.
- Sánchez. (2005). Hacia un sistema vertical de referencia unificado para América del Sur, SIRGAS GTIII: Datum Vertical. *Comisión Cartográfica IPGH*.
- Sánchez, L. (2002). *Untersuchung physikalischer höhen in kolumbien*. Dresde: Institute fur planetare geodäsie technische universität dresden.
- Schofield, W., & Breach, M. (2007). *Engineering Surveying*. United Kingdom: Elsevier.
- Tapia Gómez, A. (1999). *Topografía Subterránea*. Barcelona, España: ALFAOMEGA.
- Vaughn, S., & Crawford, T. (2009). A predictive model of archaeological potential: An example from northwestern Belize. *Applied Geography*, 542–555. doi:10.1016/j.apgeog.2009.01.001
- Wolf, P., & Ghilani, C. (2009). *Topografía*. Mexico D.F.: Alfaomega.

Este libro se terminó de imprimir
En el mes de diciembre 2017